

## EL MODELO MULTIPLICATIVO PARA EL ANÁLISIS DE IMÁGENES SAR

Alejandro C. Frery†  
Corina da C. F. Yanasse‡  
Sidnei J. S. Sant'Anna‡

†UFPE – Universidade Federal de Pernambuco  
DI – Departamento de Informática  
CP 7851  
50732-970 Recife, PE, Brasil  
frery@di.ufpe.br

‡INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
DPI – Divisão de Processamento de Imagens  
Avenida dos Astronautas, 1758  
12227-010 São José dos Campos, SP, Brasil  
{corina;sidnei}@dpi.inpe.br

### ABSTRACT

In this paper a review of the multiplicative model and its associated distributions is made for SAR image analysis. The class of  $\mathcal{G}$  distributions is introduced for the return, using the Generalized Inverse Gaussian distribution for the intensity backscatter. Several particular cases of special interest are derived, such as  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{G}^0$  distributions. Relationships among these and other distributions are presented, along with estimators for their parameters. Applications to the assessment of target homogeneity through parameter estimation are shown.

Keywords: multiplicative model; SAR; statistical modelling.

### 1. INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que la gran mayoría de los datos provenientes de imágenes de radar de apertura sintética (*Synthetic Aperture Radar - SAR*) no obedece la distribución Gaussiana. Ésto se debe a que la iluminación que se utiliza para formar tales imágenes es del tipo coherente, en el que aparecen fenómenos de interferencia constructiva y destructiva de la señal devuelta al sensor [Goodman 1982; Tur et al. 1982].

El modelo multiplicativo para la señal de retorno ha probado ser muy exitoso para datos SAR. De él de-

vienen, entre otras, las distribuciones Rayleigh, Raíz de Gamma, Exponencial, Gamma, y la clase de las distribuciones  $\mathcal{K}$ . Estas distribuciones han recibido mucha atención en la literatura especializada (ver, por ejemplo, [Lee et al. 1994; Oliver 1991]). Recientemente fue propuesta una extensión para las distribuciones asociadas al modelo multiplicativo, que lleva a la clase de distribuciones  $\mathcal{G}$  y a la subclase de distribuciones  $\mathcal{G}^0$ , útiles para el modelado de una gran variedad de blancos:

En este trabajo presentamos las distribuciones que devienen del modelo multiplicativo para los tres principales formatos de imágenes SAR multilook: complejo, intensidad (detección cuadrática) y amplitud (detección lineal). Se hace énfasis en las relaciones que vinculan estas distribuciones entre sí, lo que posibilita analizar la rugosidad de muestras a través de la estimación de parámetros.

La importancia de caracterizar estadísticamente una muestra, sea dentro o fuera del modelo multiplicativo, no se reduce a la posibilidad de clasificarla. Tal caracterización también puede redundar en la propuesta de técnicas novedosas (y mejores) para la reducción del ruido *speckle*, para la detección de alteraciones temporales, y para la extracción de parámetros biofísicos de datos SAR.

Conjeturada una distribución para una colección de datos, la estimación de parámetros es el paso que permite tanto verificar la hipótesis de trabajo como cuantificar la heterogeneidad del área observada. En este trabajo damos estimadores para los parámetros

de las distribuciones que más aparecen en la práctica.

## 2. MODELO MULTIPLICATIVO Y RUIDO SPECKLE

El modelo multiplicativo es una de las herramientas más frecuentemente usadas en el modelado estadístico de datos obtenidos con radiación coherente, tal como es el caso de imágenes SAR. Este modelo supone que el valor observado en cada coordenada de la imagen es el resultado de observar la variable aleatoria  $Z$  que, a su vez, es el producto de otras dos variables aleatorias independientes,  $X$  e  $Y$ . La variable aleatoria  $X$  modela el *backscatter* del terreno (cantidad vinculada a la constante dieléctrica del mismo, que relaciona el pulso de energía incidente con la señal devuelta al sensor), mientras que la variable aleatoria  $Y$  modela el ruido *speckle* característico de estas imágenes. Así siendo, el retorno es dado por observaciones de la variable aleatoria  $Z = X \cdot Y$ . En este trabajo los vectores serán denotados en negrito, las variables aleatorias en mayúsculas y sus eventos en minúsculas.

Pueden hacerse varias hipótesis para las distribuciones de  $X$  y de  $Y$ , y dependiendo de éstas será más o menos tratable y más o menos adecuada la distribución de  $Z$  para los datos que están siendo analizados. También puede suponerse una estructura de correlación espacial para el proceso  $(X_s)_{s \in S}$ , donde  $S$  denota el conjunto de coordenadas sobre el que está definida la imagen (el soporte de la imagen). Aunque ésta es un área de investigación importante, en este trabajo no abordaremos el modelado de la correlación espacial de los datos (es común suponer que el *speckle* puede ser considerado como formado por variables aleatorias independientes entre sí e independientes del *backscatter*).

La literatura ofrece una gran variedad de trabajos sobre las propiedades estadísticas del ruido *speckle* [Frery et al. 1996; Frery et al. 1995a; Frery et al. 1995b; Goodman 1982]. Se suele suponer que este ruido, en formato complejo (estamos tratando señales electromagnéticas, por naturaleza caracterizadas por dos componentes: una eléctrica y una magnética), tiene distribución normal bivariada de componentes independientes e idénticamente distribuidas de varianzas  $1/2$ . Denotaremos en este trabajo esta situación como  $\mathbf{Y}_C = (Y_R, Y_I) \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ . Para evitar confusiones utilizaremos los subíndices "C", "I" y "A" para los formatos complejo, de intensidad y de amplitud respectivamente.

El *speckle multilook* de intensidad aparece tomando la media de  $n$  observaciones independientes del módulo cuadrado del *speckle* complejo  $\mathbf{Y}_C$ . Así siendo, la variable aleatoria resultante  $Y_I = n^{-1} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{Y}_C(i)\|^2$  tendrá distribución Gamma con densidad

$$f_{Y_I}(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} \exp(-ny), \quad y, n > 0,$$

denotada aquí  $Y_I \sim \Gamma(n, n)$ . Un caso particular de interés es cuando  $n = 1$ , para el cual  $Y_I$  tiene distribución exponencial de media unitaria.

El *speckle multilook* de amplitud aparece tomando la raíz cuadrada del respectivo *speckle multilook* de intensidad, esto es  $Y_A = Y_I^{1/2}$ . La distribución resultante, denotada  $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$ , se conoce como "raíz cuadrada de Gamma" y es caracterizada por la densidad

$$f_{Y_A}(y) = \frac{2n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} \exp(-ny^2), \quad y, n > 0. \quad (1)$$

Para caracterizar esta manera de generar imágenes multilook podríamos utilizar la siguiente forma

$$Z_A = Z_I^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i}, \quad (2)$$

donde  $Z_i$  es el retorno de intensidad de un look.

Este modelo de generación de datos *multilook* de amplitud no es el único posible. Algunas imágenes de amplitud son formadas tomando el promedio de  $n$  datos de amplitud de un *look* cada uno [Grover and Quegan 1993]. Usando una representación análoga a la utilizada en la ecuación (2) tenemos que, según este método,

$$Z_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{Z_i}, \quad (3)$$

donde  $Z_i$  es el retorno de intensidad de un look, pero este modelo presenta un problema teórico.

La raíz cuadrada de una variable aleatoria con distribución exponencial obedece una ley Rayleigh. Para esta distribución sólo se conoce una expresión cerrada para la densidad de convoluciones cuando  $n = 2$  [Yanasse et al. 1995]. Aún en el caso  $n \geq 3$ , la distribución dada por la densidad (1) puede usarse como una buena aproximación para la densidad de la variable aleatoria definida en la ecuación (3), resolviendo parcialmente así este problema.

Aunque el número de looks  $n$  debería, en principio, ser un entero raramente se observa esto al estimar esta cantidad a partir de datos reales. Una de las razones para ello es que los datos que se promedian para formar la imagen multilook no son independientes debido, entre otros factores, a las características no ideales del sensor. En [Vieira 1996; Yanasse et al. 1993] se muestra como estimar  $n$ , llamado de ahora en más "número equivalente de looks", a partir de imágenes SAR reales.

Es importante destacar que la manera presentada para obtener el modelo multiplicativo no es la única posible. Otro abordaje consiste en construir la variable aleatoria del retorno en amplitud  $Z_A$  a través de un paseo aleatorio multidimensional, observando la distancia del proceso al origen cuando el número de

pasos crece indefinidamente. Esta derivación se basa en el modelado del número medio de reflectores elementales que constituyen cada célula de resolución.

### 3. BACKSCATTER DE AMPLITUD

En la literatura se encuentran dos modelos para el *backscatter* de amplitud: una constante, asociada a áreas homogéneas y que lleva a un retorno distribuido según una ley raíz cuadrada de Gamma, y una distribución raíz de Gamma, asociada a áreas heterogéneas y que lleva a un modelo  $\mathcal{K}_A$  para el retorno. En varios trabajos [Lopes et al. 1990; Ulaby et al. 1986] se verificó que la heterogeneidad expresable por este último modelo no es suficiente para algunas áreas y sensores, llevando a la necesidad de extenderlo.

El modelo multiplicativo más general que los autores conocen es el que se obtiene al utilizar la distribución raíz de Gaussiana inversa generalizada para el *backscatter* de amplitud (propuesta en [Frery et al. 1996]). Se dice que la variable aleatoria  $X_A$  obedece la distribución raíz de Gaussiana inversa generalizada con parámetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\lambda$  si su densidad es dada por

$$f_{X_A}(x) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} x^{2\alpha-1} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{x^2} - \lambda x^2\right), x > 0, \quad (4)$$

donde  $K_\alpha$  denota la función de Bessel modificada de tercer tipo y orden  $\alpha$ . El espacio de variación de los parámetros es el conjunto definido por

$$\begin{cases} \gamma > 0, & \lambda \geq 0 & \text{si } \alpha < 0, \\ \gamma > 0, & \lambda > 0 & \text{si } \alpha = 0, \\ \gamma \geq 0, & \lambda > 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Esta situación será denotada  $X_A \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ . Los momentos de orden  $r$  de esta variable aleatoria son dados por

$$E(X_A^r) = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{r/4} \frac{K_{\alpha+r/2}(2\sqrt{\gamma\lambda})}{K_\alpha(2\sqrt{\gamma\lambda})}.$$

Si  $X_A \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$  entonces se dice que  $X_I = X_A^2$  sigue una distribución Gaussiana inversa generalizada. Varias propiedades y aplicaciones de esta última pueden verse en [Barndorff-Nielsen and Blæsild 1981; Jørgensen 1982].

Algunas de las ventajas de usar para  $X_A$  la distribución caracterizada por la densidad dada en (4) son las siguientes:

- la densidad que caracteriza la distribución resultante de multiplicar  $X_A$  por una variable con distribución  $\Gamma^{1/2}(n, n)$  (que, como ya vimos, es un modelo interesante para el *speckle multilook* de amplitud) puede obtenerse analíticamente;

- la distribución raíz cuadrada de Gaussiana inversa generalizada se reduce a los siguientes casos particulares

- a una distribución raíz cuadrada de Gamma, llevando a un retorno con distribución  $\mathcal{K}_A$ ;
- a la distribución de la recíproca de una variable aleatoria distribuida como una raíz cuadrada de Gamma, llevando a un retorno con distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , cuya definición e importancia serán vistas en las próximas secciones;
- a una constante, que redundaría en *speckle* puro, esto es, a retorno distribuido según una raíz cuadrada de Gamma.

Estas relaciones y casos particulares se resumen en la Figura 1, donde “ $\mathcal{D}$ ” y “ $\mathcal{P}_r$ ” denotan convergencia en distribución y en probabilidad, respectivamente. Es importante notar que estas propiedades permiten, por lo menos en tesis, realizar el modelado del *backscatter* de cualquier tipo de área (suponiendo datos de amplitud bajo el modelo multiplicativo) con la distribución  $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ , escogiendo convenientemente sus parámetros

La distribución  $\Gamma^{-1/2}$  está asociada al *backscatter* de áreas extremadamente heterogéneas dado que las modelan muy exitosamente [Frery et al. 1996]. De hecho, fue la búsqueda de modelos para áreas urbanas, dentro del referencial multiplicativo, que llevó a proponer el uso de la distribución  $\mathcal{N}^{-1/2}$ , y como caso particular de la  $\Gamma^{-1/2}$ , para el *backscatter* de este tipo de áreas.

### 4. RETORNO DE AMPLITUD

Puede probarse [Frery et al. 1996] que si  $X_A \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$  y si  $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$  son independientes, entonces  $Z_A = X_A \cdot Y_A$  obedece una distribución denominada G-Amplitud con parámetros  $\alpha, \gamma, \lambda, n$ , denotada por  $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)$ , cuya densidad es dada por:

$$f_Z(x) = \frac{2n^n (\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{\Gamma(n) K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} x^{2n-1} \left(\frac{\gamma + nx^2}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-n}{2}} \cdot K_{\alpha-n}\left(2\sqrt{\lambda(\gamma + nx^2)}\right), x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

y con el espacio de parámetros dado en (5).

Sus momentos de orden  $r$  son dados por:

$$E(Z^r) = \left(\frac{\gamma}{n^2\lambda}\right)^{r/4} \frac{K_{\alpha+r/2}(2\sqrt{\gamma\lambda}) \Gamma(n+r/2)}{K_\alpha(2\sqrt{\gamma\lambda}) \Gamma(n)}.$$

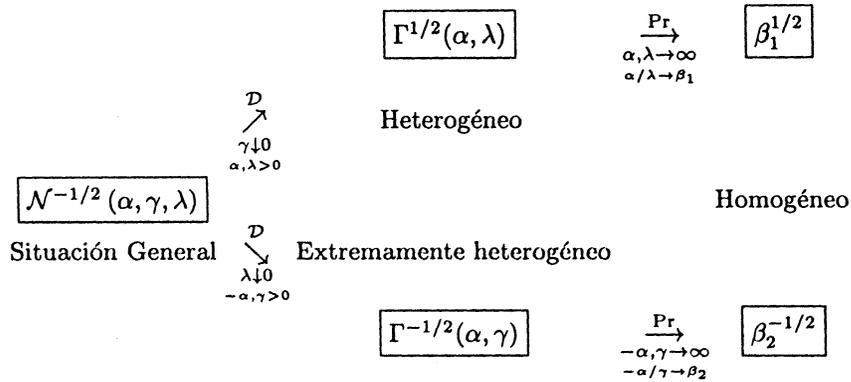


Figura 1: Resumen de las relaciones entre las distribuciones para el *backscatter* en formato de amplitud asociadas al modelo multiplicativo.

Tal como anteriormente mencionado, la distribución  $\mathcal{G}_A$  posee como casos especiales las siguientes distribuciones:

1. la distribución  $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$ , cuando  $\gamma \rightarrow 0$  con  $\alpha, \lambda > 0$ , cuya densidad es dada por:

$$f_Z(x) = \frac{4\lambda n x}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} (\lambda n x^2)^{(\alpha+n)/2-1} \cdot K_{\alpha-n}(2x\sqrt{\lambda n}), \quad \alpha, \lambda, n, x > 0; \quad (7)$$

2. la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ , cuando  $\lambda \rightarrow 0$  con  $-\alpha, \gamma > 0$ , cuya densidad es dada por:

$$f_{Z_A}(x) = \frac{2n^n \Gamma(n-\alpha) \gamma^{-\alpha} x^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(-\alpha)(\gamma + nx^2)^{n-\alpha}}, \quad -\alpha, \gamma, n, x > 0. \quad (8)$$

3. la distribución  $\Gamma^{1/2}$ , que tanto puede venir de (7), cuando  $\alpha, \lambda \rightarrow \infty$ , con  $\alpha/\lambda \rightarrow \beta_1$ , como de (8), cuando  $-\alpha, \gamma \rightarrow \infty$ , con  $-\alpha/\gamma \rightarrow \beta_2$ .

Estas relaciones están resumidas en la Figura 2, donde " $\mathcal{D}$ " y " $\mathcal{Pr}$ " denotan convergencia en distribución y en probabilidad, respectivamente. Es importante notar que estas propiedades permiten, por lo menos en tesis, reducir cualquier estimación de parámetros (suponiendo datos de amplitud bajo el modelo multiplicativo) a la estimación de  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\lambda$  (supodremos  $n$  conocido o previamente estimado) para la distribución  $\mathcal{G}_A$ . Realizada esta estimación, el área bajo estudio es clasificada según los valores observados. Las funciones de distribución acumuladas de las distribuciones  $\mathcal{K}_A$  y  $\mathcal{G}_A^0$  pueden consultarse en [Frery et al. 1996; Yanasse et al. 1995]. En esta última referencia se discuten con detalle los problemas numéricos asociados al uso de la distribución  $\mathcal{K}_A$ .

La distribución  $\mathcal{G}_A^0$  está asociada a áreas extremadamente heterogéneas por los mismos argumentos expuestos al final de la sección 3.

En particular, dado que en [Frery et al. 1996] se verificó que es suficiente utilizar los modelos  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{G}^0$ , basta observar el valor estimado del parámetro  $\alpha$  para tener una idea de la homogeneidad del área bajo estudio: valores estimados "ceranos" a cero indican un área heterogénea, mientras que valores absolutos "grandes" indican un área homogénea. Más adelante serán vistos algunos de estos valores estimados con datos reales.

En la Fig. 3 se muestran algunas densidades  $\mathcal{G}_A^0$  de un look, con media unitaria. La distribución  $\Gamma^{1/2}$  se muestra como caso límite de la  $\mathcal{G}_A^0$ , según se ve en las propiedades mostradas en la Fig. 2. El uso de escala doblemente logarítmica para la comparación de densidades puede verse en [Barndorff-Nielsen and Blæsild 1981]. De estas figuras puede verse que a medida que  $\alpha \rightarrow 0$  las modas se acercan al origen y, simultáneamente, el decrecimiento asintótico de las densidades se vuelve más lento. Las consecuencias de este comportamiento quedan en evidencia al verificar que sólo se tienen momentos de orden  $r$  para la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  si  $r < -2\alpha$ .

La fuerte influencia que el número equivalente de looks tiene en esta distribución se ilustra en la Fig. 4, donde se dibujaron varias densidades de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  de media unitaria con  $\alpha = -1$  y varios valores de  $n$ . De esta figura queda en evidencia que cuanto mayor  $n$  más simétrica es esta densidad, pareciéndose cada vez más a una normal. Así siendo, se verifica que cuanto menor  $n$  más crítico es el desvío de la hipótesis Gaussiana.

Las distribuciones en formato de intensidad, tanto para el *backscatter* como para el retorno, surgen fácilmente de aplicar la transformación de densidades dada por  $f_{X_I}(x) = f_{X_A}(\sqrt{x})/(2\sqrt{x})$  a las respectivas densidades en formato de amplitud.

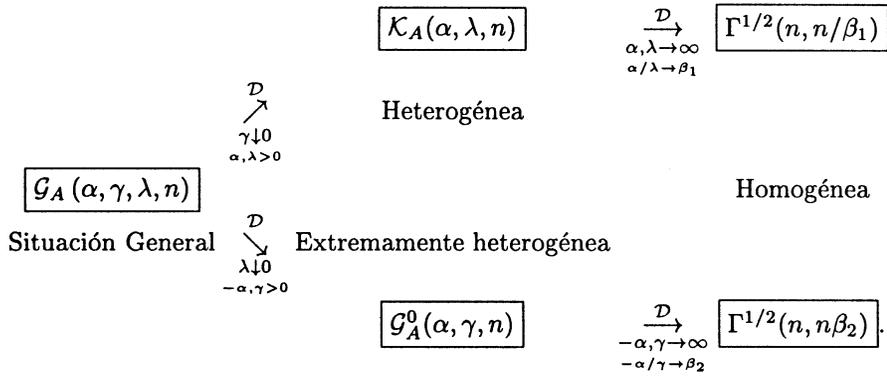


Figura 2: Resumen de las relaciones entre las distribuciones asociadas al modelo multiplicativo para datos en formato de amplitud.

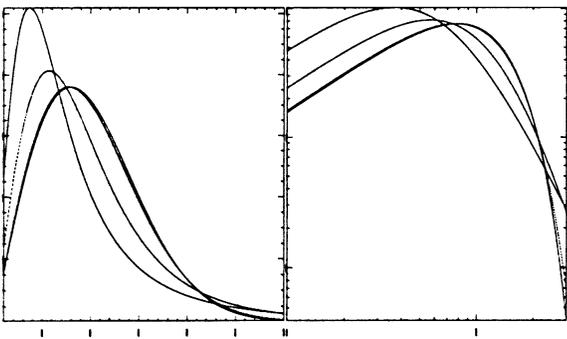


Figura 3: Densidades, en escalas lineal y doble-logarítmica, de las distribuciones  $\mathcal{G}_A^0(-1, 4/\pi^2, 1)$  (línea continua),  $\mathcal{G}_A^0(-2, 1.621, 1)$  (guiones largos),  $\mathcal{G}_A^0(-20, 24.512, 1)$  (guiones) y  $\Gamma^{1/2}(1, \pi/4)$  (guión-punto-punto-punto).

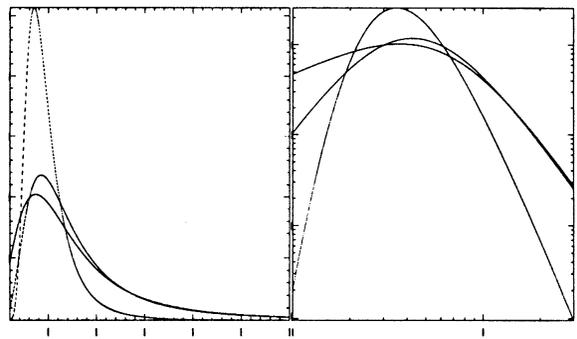


Figura 4: Densidades, en escalas lineal y doble-logarítmica, de las distribuciones  $\mathcal{G}_A^0(-1, 4/\pi^2, 1)$  (línea continua),  $\mathcal{G}_A^0(-1, 0.360, 2)$  (guiones largos) and  $\mathcal{G}_A^0(-1, 0.328, 8)$  (guiones).

## 5. FORMATO COMPLEJO

Aunque en la mayoría de las aplicaciones de imágenes de radar a percepción remota raramente se utilizan datos en este formato, tales imágenes tienen interés práctico pues, entre otras cosas, permiten verificar el funcionamiento del sistema sensor [Yanasse 1991]. Así siendo, a seguir se presentan las densidades que caracterizan las distribuciones asociadas al retorno complejo resultantes de los *backscatters* caracterizados en la Figura 1.

Las distribuciones denotadas  $\mathcal{G}_C$ ,  $\mathcal{G}_C^0$  y  $\mathcal{K}_C$  en la Figura 5 están caracterizadas, respectivamente, por las siguientes densidades:

$$f_{Z_o}(x) = \frac{1}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} \sqrt{\frac{(\lambda/\gamma)^\alpha}{\pi}} \left(\frac{\gamma+x^2}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot K_{\alpha-\frac{1}{2}}^*(2\sqrt{\lambda(\gamma+x^2)}), \\
 f_{Z_o}(x) &= \frac{\Gamma(1/2-\alpha)}{\sqrt{\pi\gamma^\alpha\Gamma(-\alpha)}} (x^2+\gamma)^{\alpha-\frac{1}{2}}, \\
 f_{Z_o}(x) &= \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{\lambda^{\alpha+1/2}}{\pi}} |x|^{\alpha-\frac{1}{2}} K_{\alpha-\frac{1}{2}}(2|x|\sqrt{\lambda}),
 \end{aligned}$$

donde  $x \in \mathbb{R}$  y los parámetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\lambda$  pertenecen al conjunto especificado en (5). Estas distribuciones son las marginales de los datos en formato complejo, y  $Z_o$  denota tanto la componente real como la imaginaria.

La distribución  $\mathcal{G}_C^0$  está asociada a áreas extremadamente heterogéneas por los mismos argumentos expuestos al final de la sección 3.

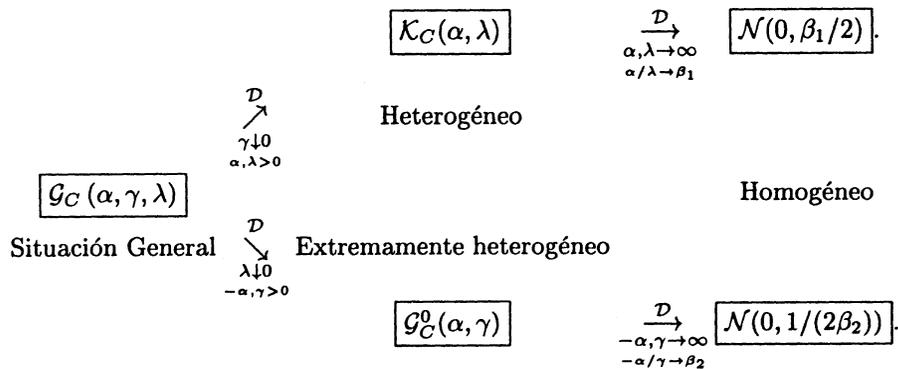


Figura 5: Resumen de las relaciones entre las distribuciones asociadas al modelo multiplicativo para datos en formato de complejo.

## 6. ESTIMACIÓN PARA EL FORMATO DE AMPLITUD

El problema de estimación de los parámetros de las distribuciones asociadas al modelo multiplicativo no está ni satisfactoria ni totalmente resuelto en la literatura. Los problemas encontrados son varios, siendo uno de los principales la notable dificultad [Joughin et al. 1993] (o, en la mayoría de los casos, imposibilidad) de encontrarse formas computacionalmente tratables para los estimadores de máxima verosimilitud.

Por estos motivos suele usarse el método de los momentos como alternativa para estimación de parámetros. Queda por resolver el problema de cuáles momentos involucrar en la estimación, pero éste es otro de los muchos problemas en abierto.

Suponiendo conocido el número equivalente de looks  $n$ , algunos estimadores para los parámetros de las distribuciones  $\Gamma^{1/2}(n, n/\beta)$ ,  $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$  y  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$  basados en este método son, respectivamente, las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\hat{\beta} = \hat{m}_2;$$

$$\begin{cases} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)\Gamma(\hat{\alpha})\Gamma(\hat{\alpha}+1/2)}{(\Gamma(n+1/4)\Gamma(\hat{\alpha}+1/4))^2} - \frac{\hat{m}_1}{m_{1/2}} = 0 \\ \hat{\lambda} = \left( \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(\hat{\alpha}+1/2)}{\Gamma(n)\Gamma(\hat{\alpha})\hat{m}_1} \right)^2 \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha}-1/4)\Gamma^2(n+1/4)}{\Gamma(-\hat{\alpha}-1/2)\Gamma(n+1/2)\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} - \frac{\hat{m}_1/2^2}{m_1} = 0 \\ \hat{\gamma} = n \left( \frac{\hat{m}_1\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)}{\Gamma(-\hat{\alpha}-1/2)\Gamma(n+1/2)} \right)^2, \end{cases}$$

donde  $\hat{m}_j$  denota el momento muestral de orden  $j$  dado por  $\hat{m}_j = \sum_{i=1}^N z_i^j$ .

## 7. APLICACIÓN A UNA IMAGEN REAL

El ejemplo de aplicación que se verá a seguir fue mostrado en [Frery et al. 1996]. Los datos provienen del sensor JERS-1, y corresponden a una región del Amazonas brasileño conocido como Reserva Florestal de Tapajós, estado de Pará. En la Fig. 6 se observan tres clases vegetales: selva virgen con relieve ondulado, selva virgen con relieve plano y una región que sufrió deforestamiento.

A cada uno de esos conjuntos de datos se le estimó los parámetros de las distribuciones  $\Gamma^{1/2}$ ,  $\mathcal{K}_A$  y  $\mathcal{G}_A^0$ , además del coeficiente de variación. Los valores estimados se muestran en la Tabla 1. La última columna de esta tabla muestra los  $p$ -valores resultantes de aplicar el test  $\chi^2$  a los tres ajustes mencionados.

De la Tabla 1 y de los ajustes mostrados en la Fig. 7 puede concluirse que el parámetro  $\alpha$  de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  está fuertemente relacionado al grado de homogeneidad de los datos, y que es menor para áreas más homogéneas. El parámetro  $alpha$  de la distribución  $\mathcal{K}_A$  también mide la homogeneidad de las áreas, siendo mayor para aquellas más homogéneas. Como previsto por el modelo, la distribución  $\Gamma^{1/2}$  sólo se ajusta bien a datos de alta heterogeneidad.

El ajuste por la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  siempre es posible, mientras que no ocurre lo mismo con la distribución  $\mathcal{K}_A$ . Esta adaptabilidad (aún más notable en el análisis de áreas urbanas presentado en [Frery et al. 1996]), sumada a las ventajas analíticas de la primera distribución en relación a la segunda, hacen que la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  sea una seria candidata a reemplazar a la distribución  $\mathcal{K}_A$  en varias aplicaciones.

## 8. EXTENSIONES

Se desconocen técnicas de estimación computacionalmente viables para los parámetros  $\alpha, \gamma, \lambda$  de la dis-

Tabla 1: Parámetros estimados en las regiones vegetales de Tapajós

Área	$\widehat{CV}$	$\widehat{\beta}$	$(\widehat{\alpha}, \widehat{\lambda})$	$(\widehat{\alpha}, \widehat{\gamma})$	$\Gamma^{1/2}$	$\frac{p\chi^2}{\mathcal{K}_A}$	$\mathcal{G}_A^0$
Relieve ondulado	0.463	1361240	$(2.254, 1.877 \cdot 10^{-6})$	$(-3.040, 2819050)$	0.00	0.01	0.04
Relieve plano	0.335	1303020	$(13.652, 1.048 \cdot 10^{-5})$	$(-14.290, 17314500)$	$5 \cdot 10^{-4}$	0.78	0.81
Deforestamiento	0.318	684111	$(21.157, 3.083 \cdot 10^{-5})$	$(-21.657, 14180400)$	0.69	0.84	0.48

tribuciones  $\mathcal{G}$ , ni se dispone de ningún resultado que permita llegar a estas distribuciones para el retorno a través de los paseos aleatorios mencionados al final de la sección 2. de este trabajo. Las propiedades de varias alternativas de estimación de los parámetros de las distribuciones  $\mathcal{K}_A$ ,  $\mathcal{G}_A^0$  y  $\mathcal{G}_I^0$  están siendo estudiadas. Los autores no conocen ningún trabajo que aborde las distribuciones  $\mathcal{G}$  multidimensionales ni tampoco variables aleatorias correlacionadas con estas distribuciones.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del CNPq-Brasil a través del proyecto PROTECM-CC GEOTEC (Proceso 680.061-94-0).

#### REFERENCIAS

- O. E. Barndorff-Nielsen and P. Blæsild. Hyperbolic distributions and ramifications: contributions to theory and applications. In C. Taillie and B. A. Baldessari, editors, *Statistical distributions in scientific work*, pages 19–44. Reidel, Dordrecht, 1981.
- A. C. Frery, H. J. Müller, C. C. F. Yanasse, and S. J. S. Sant’Anna. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1996, in press.
- A. C. Frery, C. C. F. Yanasse, and S. J. S. Sant’Anna. Alternative distributions for the multiplicative model in sar images. In *Quantitative remote sensing for science and applications*, pages 169–171, Florence, Jul. 1995. IEEE. IGARSS’95 Proc.
- A. C. Frery, C. C. F. Yanasse, and S. J. S. Sant’Anna. Statistical characterization of SAR data: the multiplicative model and extensions. In *Latinoamérica evaluada desde el espacio*, pages 502–515, Mexico, Nov. 1995. SELPER.
- J. W. Goodman. Statistical properties of laser speckle patterns. In J. C. Dainty, editor, *Laser speckle and related phenomena*, chapter 2. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- K. D. Grover and S. Quegan. Image quality, statistical and textural properties of SAREX data from the Tapajós test site. In M. Wooding and E. Attema, editors, *SAREX-92: South American Radar Experiment*, pages 15–24, Paris, 1993. ESA.
- B. Jørgensen. *Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution*, volume 9 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- I. R. Joughin, D. B. Percival, and D. P. Winebrenner. Maximum likelihood estimation of K distribution parameters for SAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 31:989–999, 1993.
- J. S. Lee, K. W. Hoppel, S. A. Mango, and A. R. Miller. Intensity and phase statistics of multi-look polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32:1017–1027, 1994.
- A. Lopes, H. Laur, and E. Nezry. Statistical distribution and texture in multilook and complex SAR images. In *Remote sensing science for the nineties*, pages 2427–2430, New York, May 1990. IEEE.
- C. J. Oliver. Information from SAR images. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 24:1493–1514, 1991.
- M. Tur, K. C. Chin, and J. W. Goodman. When is speckle noise multiplicative? *Applied Optics*, 21:1157–1159, 1982.
- F. T. Ulaby, F. Kouyate, B. Brisco, and T. M. Williams. Textural information in SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-24:235–245, 1986.
- P. R. Vieira. Desenvolvimento de classificadores de máxima verossimilhança pontuais e ICM para imagens de radar de abertura sintética. Master’s thesis, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brazil, 1996.
- C. C. F. Yanasse. *Statistical analysis of synthetic aperture radar images and its applications to system analysis and change detection*. PhD thesis, University of Sheffield, Sheffield, UK, 1991.
- C. C. F. Yanasse, A. C. Frery, and S. J. S. Sant’Anna. Stochastic distributions and the multiplicative model: relations, properties, estimators and applications to SAR image analysis. Technical Report 5630-NTC/318, INPE, São José dos Campos, SP, Brazil, 1995.
- C. C. F. Yanasse, A. C. Frery, S. J. S. Sant’Anna, P. F. Hernandez, and L. V. Dutra. Statistical analysis of SAREX data over Tapajós - Brazil. In M. Wooding and E. Attema, editors, *SAREX-92: South American Radar Experiment*, pages 25–40, Paris, 1993. ESA.

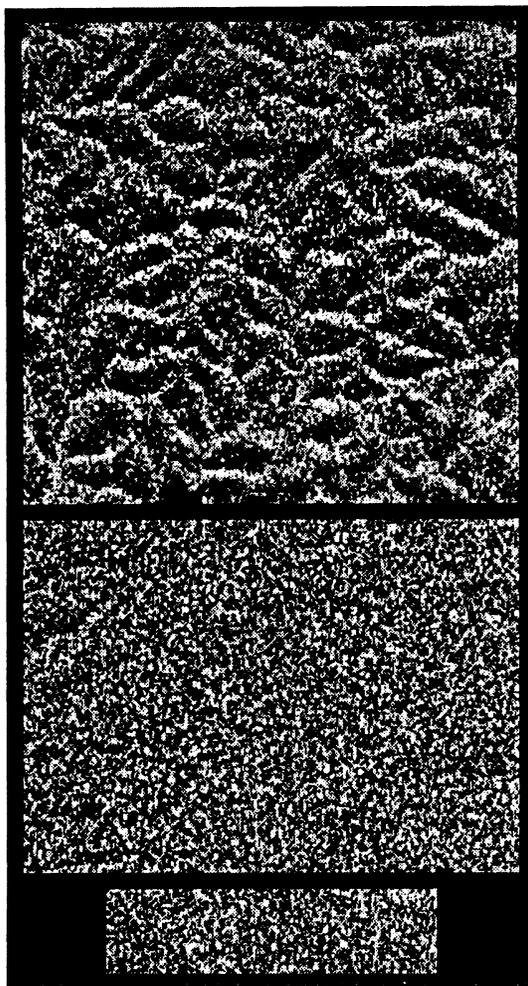


Figura 6: Áreas vegetales de selva con relieve ondulado, selva con relieve plano y región deforestada.

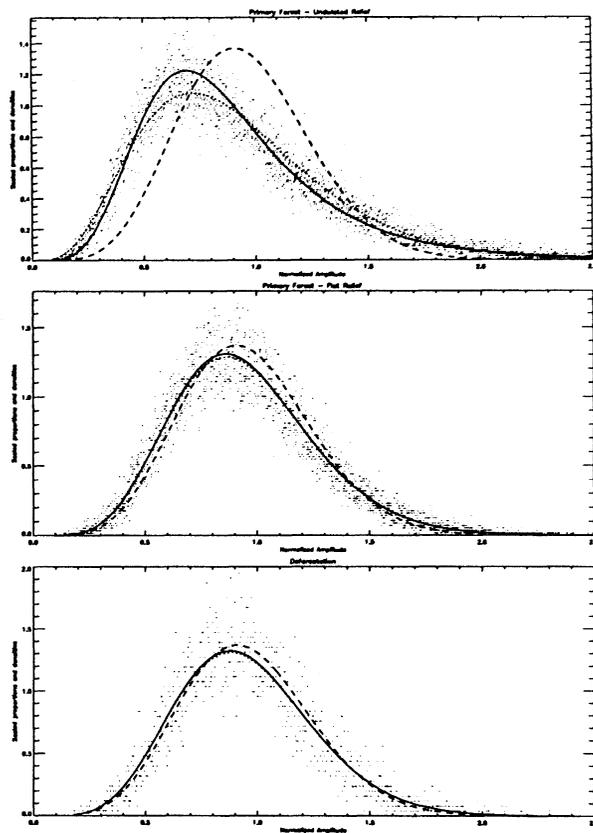


Figura 7: Ajustes por tres densidades a los datos de las áreas vegetales:  $\Gamma^{1/2}$  (guiones),  $\mathcal{K}_A$  (guiones largos) and  $\mathcal{G}_A^0$  (línea continua).