

1. Publicação nº <i>INPE-2791-PRE/354</i>	2. Versão	3. Data <i>Junho, 1983</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DIN/DPI</i>	Programa <i>CLASS</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>RECONHECIMENTO DE PADRÕES</i> <i>TEORIA DA ESTIMAÇÃO</i> <i>MODELO DE REGRESSÃO</i>			
7. C.D.U.: <i>681.3.01:519.2</i>			
8. Título <i>INPE-2791-PRE/354</i> <i>MEDIDAS DE QUALIDADE DE ESTIMADORES DE PROPORÇÕES DE CLASSES DENTRO DE UM "PIXEL" DE IMAGENS DE SATÉLITE</i>		10. Páginas: <i>52</i>	11. Última página: <i>41</i>
9. Autoria <i>Nelson Delfino D'Avila Mascarenhas</i> <i>Virginia Ragoni M. Correia</i>		12. Revisada por  <i>Maria Suelena S. Barros</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor Geral	
14. Resumo/Notas <i>A resolução de imagens de satélites de recursos naturais não é suficiente, em muitos casos, para identificar diferentes classes de uso do solo. Têm sido desenvolvidos, portanto, métodos para estimar a proporção de diferentes classes dentro de um elemento de resolução de imagem ("pixel"), baseados em modelos estatísticos de regressão. A variância dos estimadores depende fortemente da geometria definida pelos vetores médias estatísticas das diferentes classes de uso do solo. Propõe-se, neste trabalho, novas medidas relacionadas com a qualidade dessa geometria. Tais medidas são baseadas nas noções de ângulos definidos por tal geometria e no número de condição do problema envolvido. Apresentam-se resultados que relacionam medidas de qualidade propostas na literatura, ângulos da geometria do problema e variância dos estimadores com o referido número de condição.</i>			
15. Observações <i>Trabalho apresentado na 34ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência - Campinas - Julho/82.</i>			

RESUMO

A resolução de imagens de satélites de recursos naturais não é suficiente, em muitos casos, para identificar diferentes classes de uso do solo. Têm sido desenvolvidos, portanto, métodos para estimar a proporção de diferentes classes dentro de um elemento de resolução de imagem ("pixel"), baseados em modelos estatísticos de regressão. A variância dos estimadores depende fortemente da geometria definida pelos vetores médias estatísticas das diferentes classes de uso do solo. Propõe-se, neste trabalho, novas medidas relacionadas com a qualidade dessa geometria. Tais medidas são baseadas nas noções de ângulos definidos por tal geometria e no número de condição do problema envolvido. Apresentam-se resultados que relacionam medidas de qualidade propostas na literatura, ângulos da geometria do problema e variância dos estimadores com o referido número de condição.

ABSTRACT

In many cases the resolution of natural resources satellite imagery is not sufficient to cover different land use classes. Therefore, methods for estimating the proportion of different classes within a single image resolution element (pixel) have been proposed, based on statistical regression models. The variance of the estimators strongly depends on the geometry defined by the statistical average vectors of different land use classes. In this work, new measures are proposed related to the quality of that geometry. Such measures are based on the notions of angles defined by the geometry and on the condition number of the problem. Results relating previously proposed quality measures, geometry angle and estimates variances with the condition number are presented.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>vi</i>
LISTA DE TABELAS	<i>ix</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - MODELO PARA ESTIMAÇÃO DE PROPORÇÕES</u>	3
2.1 - Introdução	3
2.2 - Estimação das proporções segundo Horwitz	6
2.3 - Interpretação geométrica	7
<u>CAPÍTULO 3 - TÉCNICAS DE ANÁLISE DAS ESTIMATIVAS</u>	9
3.1 - Conceitos preliminares	9
3.2 - Medidas de qualidade das estimativas	9
3.2.1 - RMIN e DIVSOM	10
3.2.2 - MIN(YNOR)	11
3.2.3 - Número de condição	12
3.2.4 - Variância da estimativa	14
3.2.5 - Ângulos	15
<u>CAPÍTULO 4 - RESULTADOS OBTIDOS</u>	17
4.1 - Introdução	17
4.2 - Relações entre as medidas de qualidade	29
4.3 - Comentários finais	39
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	41

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Sinais médios e sinal observado no espaço tridimensional .	8
3.1 - Sinais médios e elipsóides de contorno	9
3.2 - Medida segundo Horwitz et alii (1971) para 3 classes	11
3.3 - Ângulos internos do triângulo	16
4.1 - Elipses de contorno das classes água, trigo, solo	18
4.2 - Elipses de contorno das classes água, trigo, mata	19
4.3 - Elipses de contorno das classes água, trigo, pasto	20
4.4 - Elipses de contorno das classes água, solo, mata	21
4.5 - Elipses de contorno das classes água, solo, pasto	22
4.6 - Elipses de contorno das classes água, mata, pasto	23
4.7 - Elipses de contorno das classes trigo, solo, mata	24
4.8 - Elipses de contorno das classes trigo, solo, pasto	25
4.9 - Elipses de contorno das classes trigo, mata, pasto	26
4.10 - Elipses de contorno das classes solo, mata, pasto	27
4.11 - Gráfico $10 COT\theta_1 AUT_1$	32
4.12 - Gráfico $(VARX_2 + VARX_3):AUT_1$	34
4.13 - Gráfico $(VARX_2 + VARX_3):10 COT\theta_1 $	35
4.14 - Gráfico $(AUT_1 + AUT_2 + AUT_3):MIN(YNOR)$	36
4.15 - Gráfico $(VARX_1 + VARX_2 + VARX_3):MIN(YNOR)$	37
4.16 - Gráfico $10 MAX COT\theta :MIN(YNOR)$	38

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 - Dados obtidos utilizando os canais 1 e 2 do Landsat	30
4.2 - Dados obtidos através do programa "Geometria dos sinais" .	31

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Numerosas são as aplicações dos sensores remotos. Dentre elas pode-se incluir identificação de culturas, previsão de safra, densidade de culturas, além de estudos urbanísticos, cartografia, danos causados por catástrofes naturais, etc.

Estas aplicações entretanto ainda são limitadas pela capacidade de resolução do sensor que, em alguns casos, reduz a quantidade de informação útil que pode ser obtida. Tal redução deve-se ao fato de muitos elementos de resolução conterem uma mistura de classes.

No método convencional de reconhecimento de padrões, associa-se a cada elemento de resolução de imagem uma única classe de uso do solo. Encontra-se a área total coberta por um específico uso de solo, somando os "pixels" com ele identificados.

Esta técnica conduz a uma estimativa adequada, se a área coberta pelo "pixel" contiver apenas uma classe. Porém, se este possuir quantidades substanciais de outras classes, o "pixel" não será corretamente classificado. Isto ocorre, frequentemente, devido à resolução das imagens do LANDSAT.

Pesquisas estão sendo feitas na área de estimativa de proporção, com o objetivo de aumentar a informação sobre a participação de diferentes classes em um único "pixel".

A primeira parte deste trabalho desenvolve um modelo matemático que relaciona os sinais espectrais de um "pixel", onde há mistura de classes ("pixel" mistura), com os sinais das classes componentes (Horwitz et alii, 1975). Aspectos computacionais do problema requerem que a matriz de covariância da mistura seja a média das matrizes de covariância das classes envolvidas. Com esta simplificação, a

estimação das proporções passa a ser um problema de programação quadrática. O número de diferentes tipos de cultura, neste modelo, é limitado, não podendo superar o número de canais por mais de uma unidade (Horwitz et alii, 1975).

A segunda parte do trabalho faz uma previsão das estimativas que serão obtidas através de um estudo sobre a geometria dos sinos médios das classes componentes do "pixel" mistura. Este estudo é feito através de medidas de qualidade descritas na literatura e outras propostas neste trabalho.

CAPÍTULO 2

MODELO PARA ESTIMAÇÃO DE PROPORÇÕES

2.1 - INTRODUÇÃO

Quando a resolução de imagens de satélites não é suficiente para abranger uma única classe de cultura, um elemento de resolução, "pixel", poderá conter informação sobre várias delas. Com o objetivo de estimar a proporção de cada classe dentro do "pixel", é necessário construir um modelo que relacione os vetores observados com as proporções contidas no elemento de resolução.

Dentre os modelos que vêm surgindo na literatura destacam-se o de Horwitz et alii (1971), Detchmendy e Pace (Salvato Junior, 1973) e Basu and Basu (1976).

Segundo o modelo proposto por Horwitz et alii (1971), o sinal da i -ésima classe, ou espécie, componente do "pixel" mistura ($1 \leq i \leq n$), é representado por uma distribuição gaussiana com média $\underline{\mu}_i$ e matriz de covariância $\underline{\Lambda}_i$. Se a proporção dessa classe no elemento de resolução for a_i , e $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, então o sinal desta combinação de classes terá média $\underline{\mu}_a$ e matriz de covariância $\underline{\Lambda}_a$. As expressões para $\underline{\mu}_a$ e $\underline{\Lambda}_a$ são dadas por:

$$\underline{\mu}_a = \sum_{i=1}^n a_i \underline{\mu}_i, \quad (2.1)$$

$$\underline{\Lambda}_a = \sum_{i=1}^n a_i \underline{\Lambda}_i \quad (2.2)$$

Se os dados observados de um elemento de resolução forem representados por um vetor m -dimensional, \underline{y} , então, o estimador

de máxima verossimilhança conduzirá à escolha de um vetor fração de área, \underline{a} , tal que a função de verossimilhança $\theta(\underline{a})$ seja minimizada, onde:

$$\theta(\underline{a}) = \ln |\underline{\Lambda}_a| + (\underline{y} - \underline{\mu}_a)^T \underline{\Lambda}_a^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu}_a), \quad (2.3)$$

sujeita às restrições de que o vetor \underline{a} é um vetor proporção, isto é:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad (2.4)$$

$$a_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.5)$$

Aqui, $|\underline{\Lambda}_a|$ é o determinante da matriz $\underline{\Lambda}_a$ e $\underline{\Lambda}_a^{-1}$, sua inversa.

No modelo proposto por Detchmendy e Pace (Salvato Junior, 1973), a radiação refletida pelo elemento de resolução, quando observada por um sensor multispectral com m canais, pode ser representada como:

$$\underline{y} = \sum_{i=1}^n a_i \underline{s}_i + \underline{\varepsilon} \quad (2.6)$$

onde:

\underline{y} é um vetor $m \times 1$ representando a radiação refletida pelo "pixel" mistura;

\underline{s}_i é um vetor $m \times 1$ definido como vetor básico da i -ésima espécie pura;

a_i é a fração do "pixel" ocupada pela i -ésima espécie pura;

$\underline{\varepsilon}$ é o vetor aleatório;

n é o número de classes existentes no elemento de resolução.

As proporções a_i estão sujeitas às mesmas restrições do modelo anterior.

Neste modelo, dado o vetor observado, \underline{y} , e os vetores básicos, \underline{s}_i ($i = 1, \dots, n$), o problema será determinar o correspondente vetor fração de área \underline{a} , onde $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

Supondo-se que o número de classes n é menor ou igual ao número de canais acrescido de uma unidade, a melhor solução será a dos mínimos quadrados.

Portanto, é necessário calcular o vetor, \underline{a} , tal que a função $\phi(\underline{a})$ seja minimizada, onde:

$$\phi(\underline{a}) = \left(\underline{y} - \sum_{i=1}^n a_i \underline{s}_i \right)^T \underline{W} \left(\underline{y} - \sum_{i=1}^n a_i \underline{s}_i \right), \quad (2.7)$$

e \underline{W} é uma matriz ponderada $m \times m$ que considera os erros de observação.

Esta minimização, entretanto, está sujeita as Restrições 2.4 e 2.5.

Comparando os dois modelos observa-se que, se no modelo de Detchmendy e Pace, os vetores básicos das classes forem iguais aos vetores médias (i.e., $\underline{s}_i = \underline{\mu}_i$) e se a matriz ponderada for a inversa da matriz de covariância do vetor observado (i.e., $\underline{W} = \underline{\Lambda}^{-1}$), os dois modelos serão idênticos.

Para cada classe, Horwitz et alii (1971) e Detchmندی e Pace (Salvato Junior, 1973) calculam o total da área ocupada na região de interesse, estimando-a "pixel" por "pixel" através do modelo de estimacão das proporções. No entanto, o modelo proposto por Basu e Basu (1976) estima a proporção média de cada classe em um conjunto de n "pixels"; porém não considera as restrições de desigualdade nas proporções, podendo desta forma obter proporções negativas.

Uma vez que o objetivo principal deste trabalho é estudar a geometria de sinais, o modelo de Horwitz et alii (1971) foi escolhido dada a sua importante contribuição para este assunto.

2.2 - ESTIMACÃO DAS PROPORÇÕES SEGUNDO HORWITZ

Dado um vetor m -dimensional observado, \underline{y} , a estimacão do vetor proporção, \underline{a} , por máxima verossimilhança conduz a uma proporção que minimiza a função:

$$\theta(\underline{a}) = \ln |\underline{\Lambda}_a| + (\underline{y} - \underline{\mu}_a)^T \underline{\Lambda}_a^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu}_a), \quad (2.8)$$

sujeita à restrição de que \underline{a} é um vetor proporção, isto é:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad (2.9)$$

$$a_i \geq 0 \quad (2.10)$$

Este problema de minimizacão é extremamente difícil de resolver devido ao fato de $\theta(\underline{a})$ não ser uma função convexa e suas derivadas, difíceis de calcular (Salvato Junior, 1973).

Portanto, considera-se que:

$$\underline{\Lambda}_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{\Lambda}_i \quad (2.11)$$

Deste modo, a função $\theta(a)$ torna-se convexa, devido a $\underline{\Lambda}_a$ não depender do vetor proporção, \underline{a} . Assim, o primeiro termo da Equação 2.8, sendo constante, não contribui para a minimização e pode ser desprezado. Desta forma tem-se:

$$\theta'(a) = (\underline{y} - \underline{\mu}_a)^T \underline{\Lambda}_a^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu}_a) \quad (2.12)$$

O problema resume-se então em determinar o vetor proporção \underline{a} , tal que $\theta'(a)$ seja mínima, sujeita às Restrições 2.9 e 2.10.

2.3 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

O problema de estimação de proporções pode ser interpretado geometricamente como o de minimizar a distância de um vetor observado ao "simplex" de sinais.

Entende-se por "simplex" de sinais a figura geométrica formada quando os pontos determinados pelos vetores médias das classes componentes do "pixel" mistura são ligados.

A Figura 2.1 ilustra o significado do problema de estimação no caso particular em que o "pixel" é representado por uma mistura de 3 classes. Verifica-se que as extremidades A_1 , A_2 e A_3 dos vetores médias $\underline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_2$ e $\underline{\mu}_3$, respectivamente, determinam um triângulo que define o plano π . Se o ponto extremo, M, do vetor observado \underline{y} , estiver acima ou abaixo deste plano π , a restrição $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ não será satisfeita. Por outro lado, se o ponto M estiver no plano, mas não se localizar no interior ou fronteira do triângulo, as restrições $a_i \geq 0$ (onde $1 \leq i \leq 3$) serão violadas.

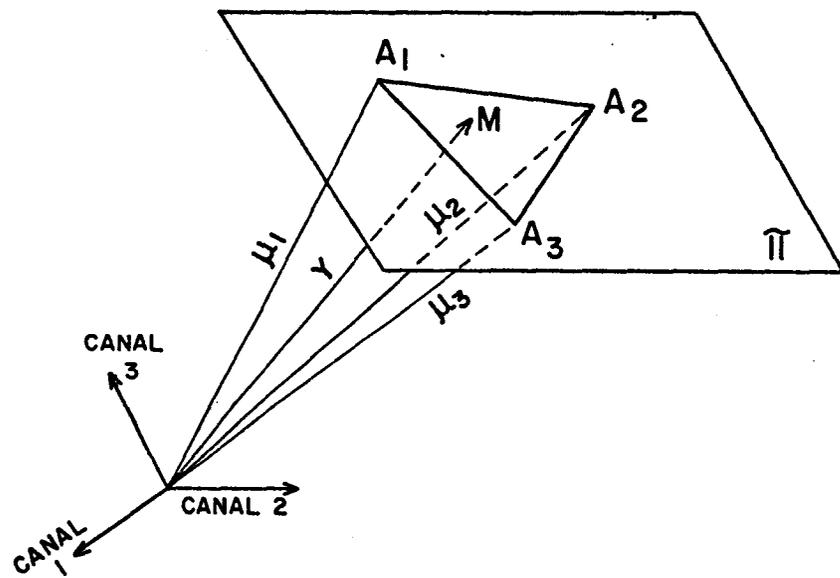


Fig. 2.1 - Sinais médios e sinal observado no espaço tridimensional

Outrossim, pode-se fazer uma inferência, a priori, das estimativas das proporções de cada classe componente do "pixel" mistura, dadas as assinaturas espectrais das classes isoladas. A forma como isto é feito é abordada a seguir.

CAPÍTULO 3

TÉCNICAS DE ANÁLISE DAS ESTIMATIVAS

3.1 - CONCEITOS PRELIMINARES

A qualidade da estimação das proporções \bar{e} é determinada examinando-se o conjunto de sinais puros componentes do "pixel" mistura e as respectivas matrizes de covariância.

A matriz de covariância pode ser representada por um elipsóide centrado no correspondente sinal médio. Se $\underline{\mu}_i$ é o i -ésimo sinal médio e $\underline{\Lambda}_i$ a matriz de covariância, o elipsóide de contorno unitário é o lugar geométrico determinado por $\langle (\underline{y} - \underline{\mu}_i)^T \underline{\Lambda}_i^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu}_i) \rangle = 1$.

A Figura 3.1 ilustra a situação para três sinais e dois canais.

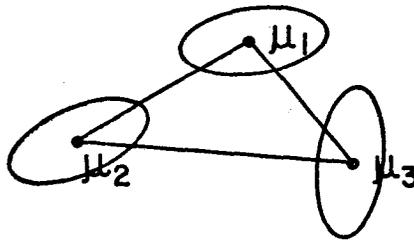


Fig. 3.1 - Sinais médios e elipsóides de contorno.

Para fazer uma análise prévia das estimativas a partir dos sinais médios das classes envolvidas no "pixel" mistura e das matrizes de covariância, propõem-se algumas medidas de qualidade baseadas na geometria desses sinais.

3.2 - MEDIDAS DE QUALIDADE DAS ESTIMATIVAS

3.2.1 - RMIN E DIVSOM

Segundo Horwitz et alii (1971), se alguma classe, representada por um vértice do simplex de sinais, estiver muito próxima da combinação convexa das demais, será observada grande incerteza na estimação das proporções. Esta proximidade dependerá do tamanho e da forma dos elipsóides sobre os vértices que estão relacionados com a matriz de covariância de cada classe envolvida.

Para cada vértice de sinal médio $\underline{\mu}_i$, Horwitz et alii (1971) calcula a distância relativa r_i , que é a razão da menor distância de $\underline{\mu}_i$ ao conjunto convexo dos outros $\underline{\mu}_j$, pela extensão máxima do elipsóide de contorno do vértice i .

Seja \underline{b}_i o ponto mais próximo de $\underline{\mu}_i$ em relação ao conjunto convexo de $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n$ (Figura 3.2). Se os autovalores da matriz de covariância associada ao sinal $\underline{\mu}_i$ forem λ_j e os autovetores \underline{e}_j , r_i será calculada pelas seguintes expressões:

$$\underline{s}_j = \sqrt{\lambda_j} \frac{\underline{e}_j}{\|\underline{e}_j\|}, \quad (3.1)$$

$$p_i = \max_j \left| \frac{\langle \underline{s}_j, \underline{\mu}_i - \underline{b}_i \rangle}{\|\underline{\mu}_i - \underline{b}_i\|} \right| \quad (3.2)$$

$$r_i = \frac{\|\underline{\mu}_i - \underline{b}_i\|}{p_i} \quad (3.3)$$

onde: $1 \leq i \leq n$ é o nº de classes componentes

$1 \leq j \leq m$ é o nº de canais espectrais

O menor dos r_i será denominado RMIN.

Se $r_i \leq 1$ para algum i , não se poderá esperar boa estimativa das proporções com este conjunto de sinais.

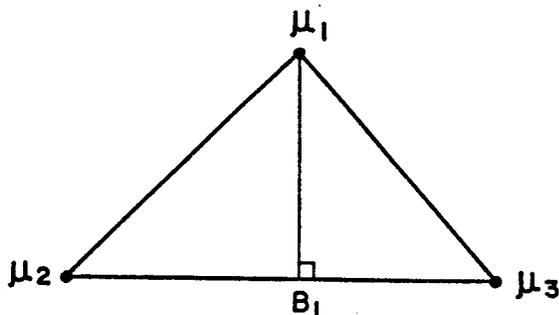


Fig. 3.2 - Medida segundo Horwitz et alii (1971) para 3 classes.

Em outro trabalho, Horwitz et alii (1975) sugerem que uma boa estimativa das proporções não ocorrerá se:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \right)^{-1} \leq 1.$$

A medida $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \right)^{-1}$ será designada DIVSOM.

3.2.2 - MIN(YNOR)

Devido à dificuldade de visualizar a medida proposta por Horwitz et alii (1971) visto que esta leva em consideração as matrizes de covariância sobre cada vértice, é proposta neste trabalho uma medida de Horwitz et alii modificada.

Suponha-se que as matrizes de covariância sobre cada vértice sejam identidades. Então, pode-se considerar a distância não-ponderada de um vértice à combinação convexa dos demais. Observa-se que quanto menor for essa distância, piores serão as estimativas. MIN(YNOR) será o nome dessa distância.

3.2.3 - NÚMERO DE CONDIÇÃO

Considera-se o problema clássico de regressão linear aplicado à mistura de classes, em que proporções desconhecidas estão relacionadas com os sinais do "pixel" mistura pela equação:

$$\underline{y} = \underline{A}\underline{x} + \underline{\varepsilon} \quad (3.5)$$

onde:

\underline{y} é um vetor observado m dimensional, representado o sinal do "pixel" mistura;

\underline{A} é uma matriz m x n de elementos constantes, em que cada uma das n colunas representa o vetor média de uma classe componente do "pixel" mistura;

\underline{x} é um vetor n dimensional, onde cada componente representa a proporção de cada classe no "pixel" mistura;

$\underline{\varepsilon}$ é um vetor m dimensional de erros de observação que satisfaz às condições: $E(\underline{\varepsilon})=0$, $E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^T)=\underline{S}$; onde \underline{S} é a matriz de covariância do vetor observado \underline{y} ;

m é o número de canais espectrais;

n é o número de classes componentes da mistura.

Pelo método dos mínimos quadrados, a estimativa de \underline{x} , denominada $\hat{\underline{x}}$, é obtida minimizando-se a forma quadrática:

$$\theta(\underline{x}) = (\underline{y}-\underline{A}\underline{x})^T \underline{S}^{-1} (\underline{y}-\underline{A}\underline{x}), \quad (3.6)$$

que tem como solução:

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{y}, \quad (3.7)$$

onde $\hat{\underline{x}}$ é um vetor com $E(\hat{\underline{x}}) = \underline{x}$ e $VAR(\hat{\underline{x}}) = (\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A})^{-1}$

Seja a equação de um elipsóide no espaço Z, centrado em $\hat{\underline{x}}$:

$$(\underline{z} - \hat{\underline{x}})^T \underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A} (\underline{z} - \hat{\underline{x}}) = k^2. \quad (3.8)$$

Sabe-se que a forma, o tamanho e a orientação do elipsóide são determinados pelo valor de K e pelos autovalores e autovetores da matriz $\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A}$.

O tamanho do elipsóide está associado a um nível de significância para \underline{x} ; os autovetores da matriz $\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A}$ fornecem a direção dos eixos principais e os autovalores associados a esses autovetores dão os comprimentos desses eixos, através da relação:

$$\Gamma_i = \frac{2K}{\omega_i},$$

onde ω_i é a raiz quadrada positiva do autovalor associado ao i-ésimo autovetor.

A localização do elipsóide, entretanto, dependerá de valores amostrais particulares de \underline{y} , que determinam o vetor $\hat{\underline{x}}$ através da Equação 3.7.

O número de condição do sistema é definido como a raiz quadrada positiva da razão entre o maior e o menor autovalor do inverso da matriz de covariância do vetor estimado $\hat{\underline{x}}$.

Se ω_1^2 é o maior autovalor e ω_n^2 , o menor, então o número de condição é:

$$NC = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (3.9)$$

Rust e Burrus (1972) demonstram que o sistema é mal condicionado, se pequenas mudanças no vetor observado \underline{y} produzem grandes mudanças no vetor $\hat{\underline{x}}$.

Quando o número de condição for grande, pequenas mudanças na observação acarretarão grandes mudanças, nas proporções estimadas e o sistema será dito mal condicionado; caso contrário, isto é, se pequenas mudanças na observação acarretarem pequenas mudanças nas estimativas, o sistema será chamado bem condicionado.

Uma outra forma de obter o número de condição é através da razão entre o maior e o menor eixo principal do elipsóide.

Como foi apresentado, o comprimento do maior eixo é $\Gamma_n = \frac{2k}{\omega_n}$ e do menor é $\Gamma_i = \frac{2k}{\omega_i}$. A razão entre os dois é portanto:

$$\frac{\Gamma_n}{\Gamma_i} = \frac{\omega_i}{\omega_n} \quad (3.10)$$

3.2.4 - VARIÂNCIA DA ESTIMATIVA

Sabendo que a variância da estimativa mede a dispersão dos valores estimados em relação à média, utiliza-se a variância como outra medida de qualidade da geometria dos sinais. Valores muito dispersos implicam uma estimativa de má qualidade.

Dado que a matriz de covariância do vetor proporção $\hat{\underline{x}}$ é $(\underline{A}^T \underline{S}^{-1} \underline{A})^{-1}$, sua diagonal principal fornece as variâncias das componentes de $\hat{\underline{x}}$.

3.2.5 - ÂNGULOS

No caso de uma mistura de 3 classes, o simplex de sinais teria a forma de um triângulo como já foi visto na Seção 2.1.

Para este caso particular, propõe-se uma outra medida de qualidade que são os ângulos internos do triângulo.

Seja um triângulo definido pelas extremidades dos vetores \underline{a}_1 , \underline{a}_2 e \underline{a}_3 , conforme Figura 3.3, onde:

$$\theta_1 = \widehat{\text{ângulo}} \text{ entre os vetores } (\underline{a}_2 - \underline{a}_1) \text{ e } (\underline{a}_3 - \underline{a}_1)$$

$$\theta_2 = \widehat{\text{ângulo}} \text{ entre os vetores } (\underline{a}_1 - \underline{a}_2) \text{ e } (\underline{a}_3 - \underline{a}_2)$$

$$\theta_3 = \widehat{\text{ângulo}} \text{ entre os vetores } (\underline{a}_1 - \underline{a}_3) \text{ e } (\underline{a}_2 - \underline{a}_3);$$

então:

$$\theta_1 = \text{arc cos} \frac{(\underline{a}_2 - \underline{a}_1)^T (\underline{a}_3 - \underline{a}_1)}{\|\underline{a}_2 - \underline{a}_1\| \|\underline{a}_3 - \underline{a}_1\|},$$

$$\theta_2 = \text{arc cos} \frac{(\underline{a}_1 - \underline{a}_2)^T (\underline{a}_3 - \underline{a}_2)}{\|\underline{a}_1 - \underline{a}_2\| \|\underline{a}_3 - \underline{a}_2\|}$$

$$\theta_3 = \text{arc cos} \frac{(\underline{a}_1 - \underline{a}_3)^T (\underline{a}_2 - \underline{a}_3)}{\|\underline{a}_1 - \underline{a}_3\| \|\underline{a}_2 - \underline{a}_3\|}$$

o símbolo $\|\underline{v}\|$ significa a norma do vetor \underline{v} .

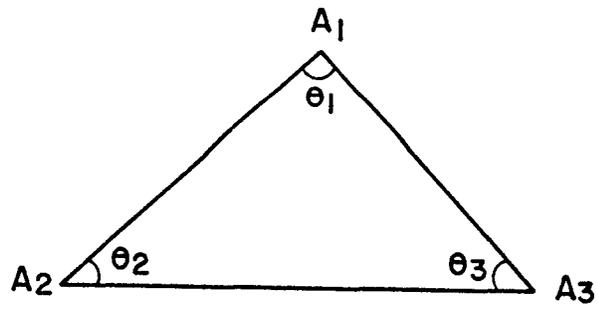


Fig. 3.3 - Ângulos internos do triângulo

Quando um desses ângulos for próximo de 0° ou 180° , as semi-retas que o definem serão quase linearmente dependentes e espera-se que as estimativas não sejam boas.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS OBTIDOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta resultados que relacionam as medidas de qualidade propostas no capítulo anterior.

Para o desenvolvimento do programa que fornece esses resultados, foram obtidos através do Sistema I-100, do laboratório de Imagens Digitais do INPE, parâmetros estatísticos das classes água, trigo, solo, mata e pasto.

Com o objetivo de visualizar a geometria em um espaço bidimensional (Figuras 4.1 a 4.10), utilizam-se apenas dois dos quatro canais do LANDSAT. Dado que o número de classes não deve exceder o número de canais espectrais por mais de uma unidade e desejando-se um sistema determinado, utilizar-se-ão 3 destas classes

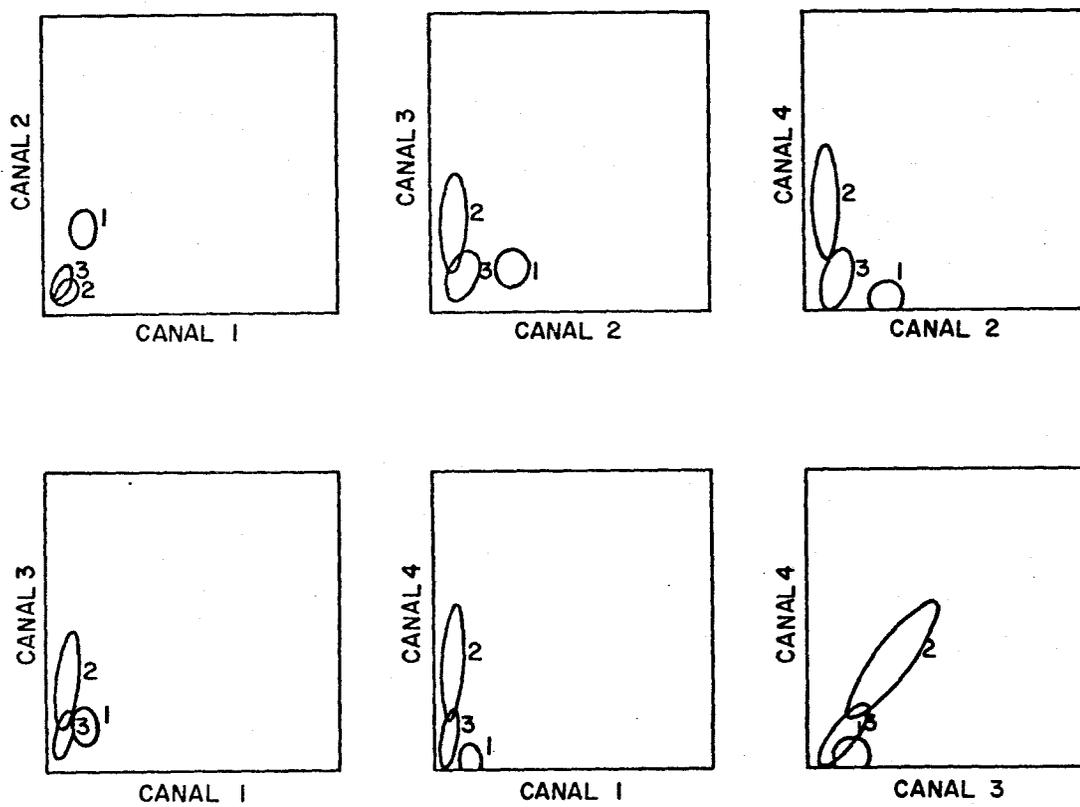


Fig. 4.1 - Elipses de contorno das classes água, trigo, solo.

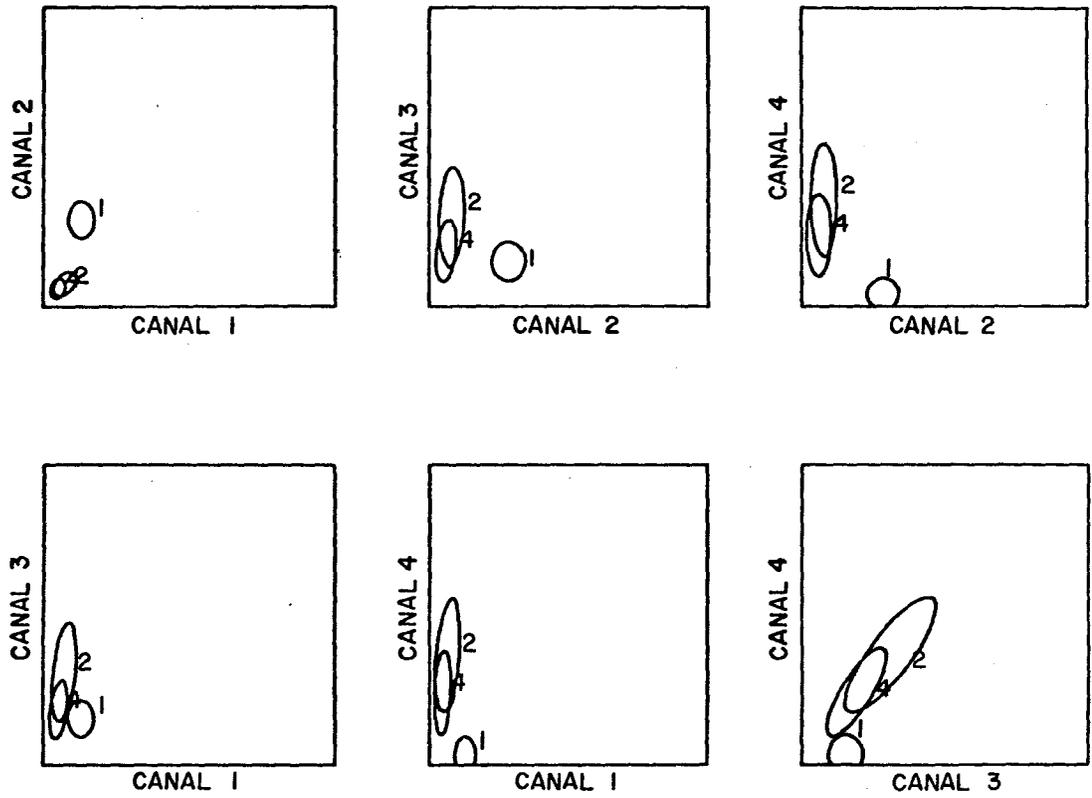


Fig. 4.2 - Elipses de contorno das classes água, trigo, mata.

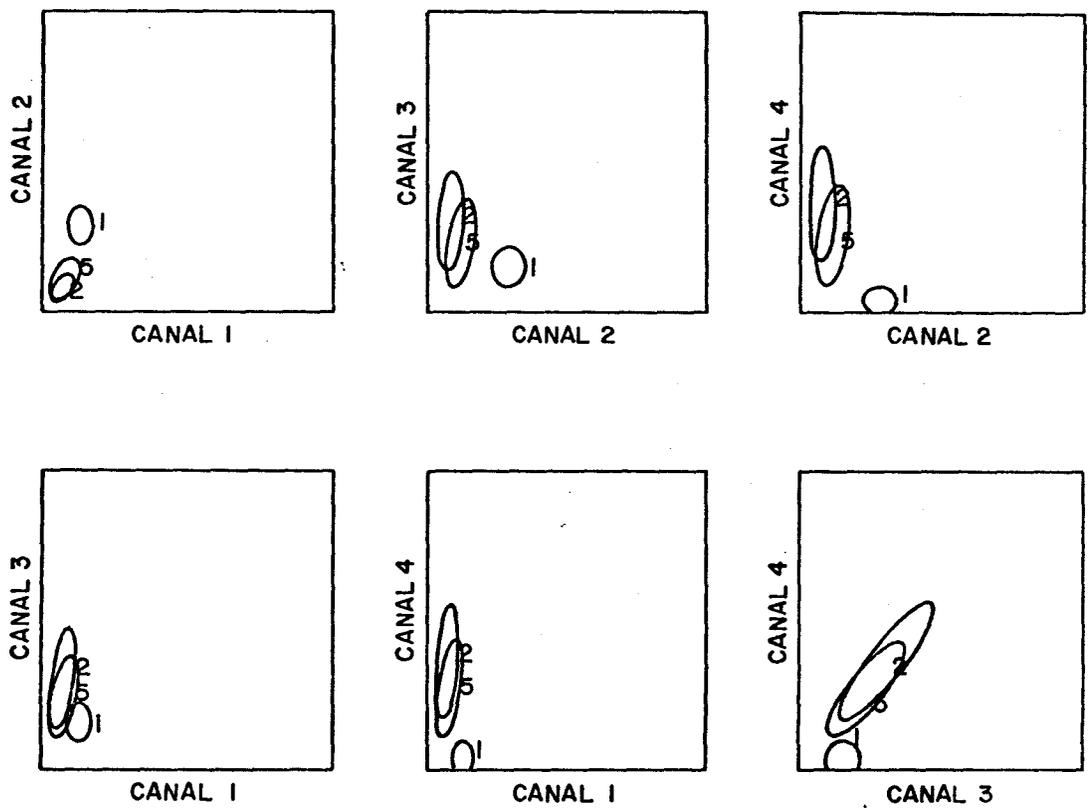


Fig. 4.3 - Elipses de contorno das classes água, trigo, pasto.

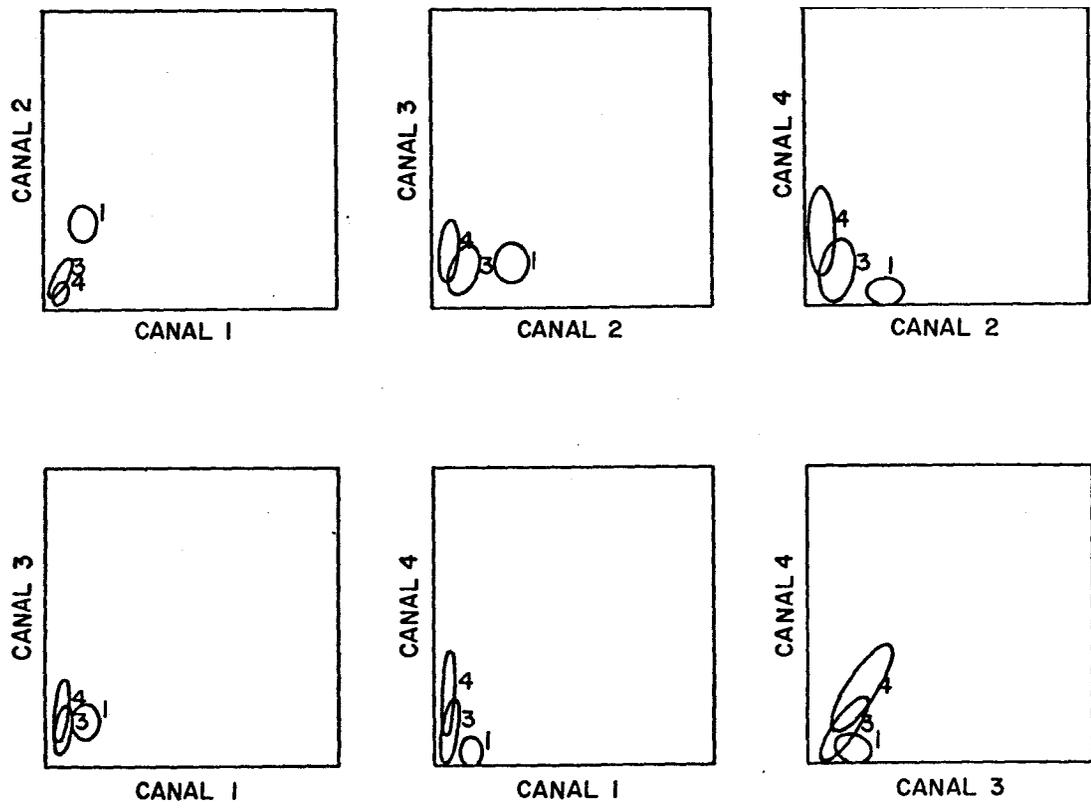


Fig. 4.4 - Elipses de contorno das classes água, solo, mata.

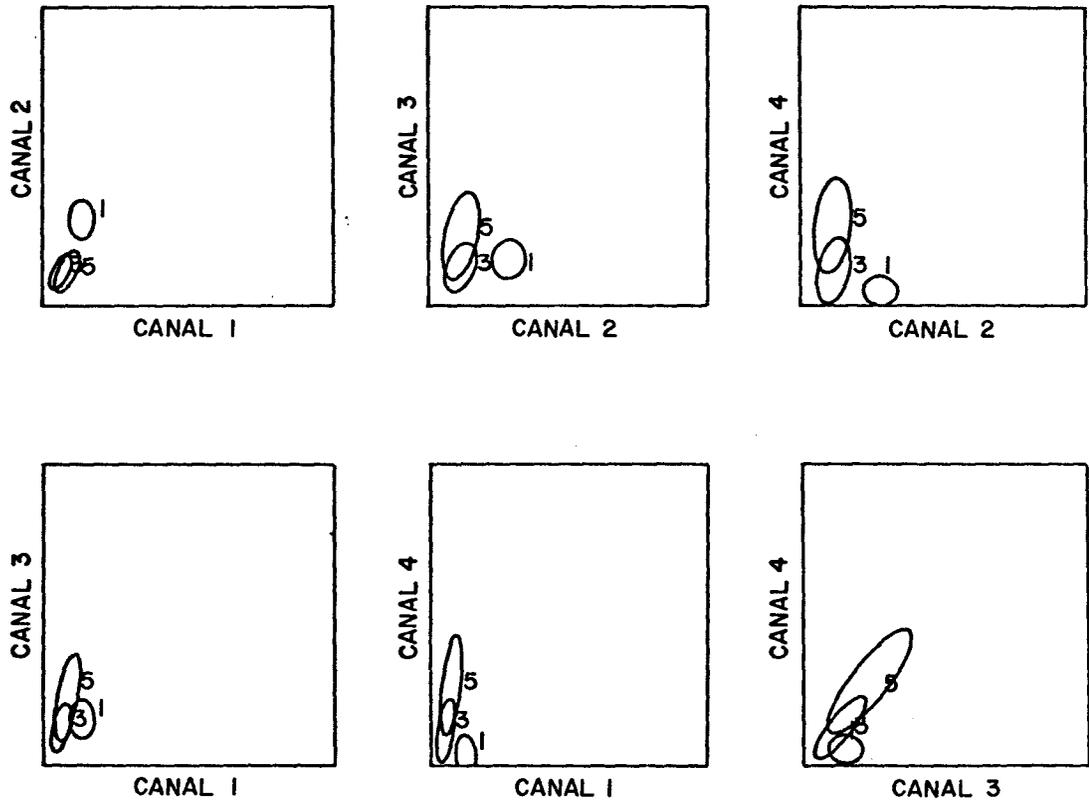


Fig. 4.5 - Elipses de contorno das classes água, solo, pasto.

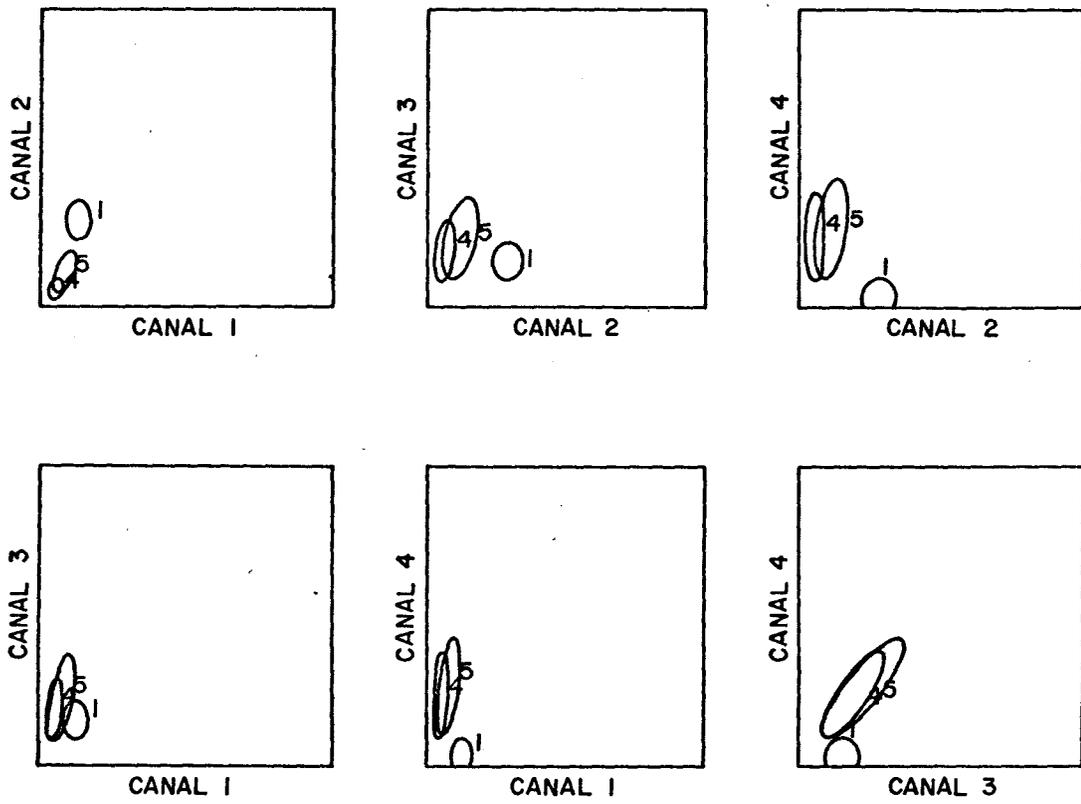


Fig. 4.6 - Elipses de contorno das classes água, mata, pasto.

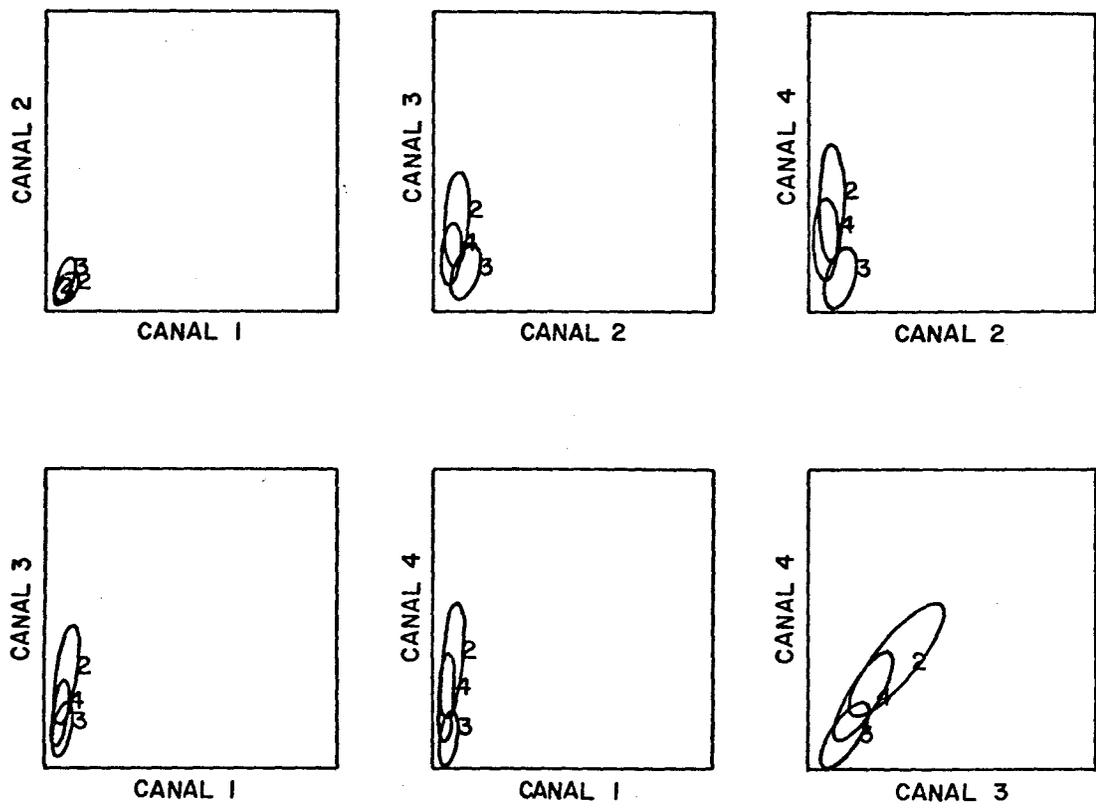


Fig. 4.7 - Elipses de contorno das classes trigo, solo, mata.

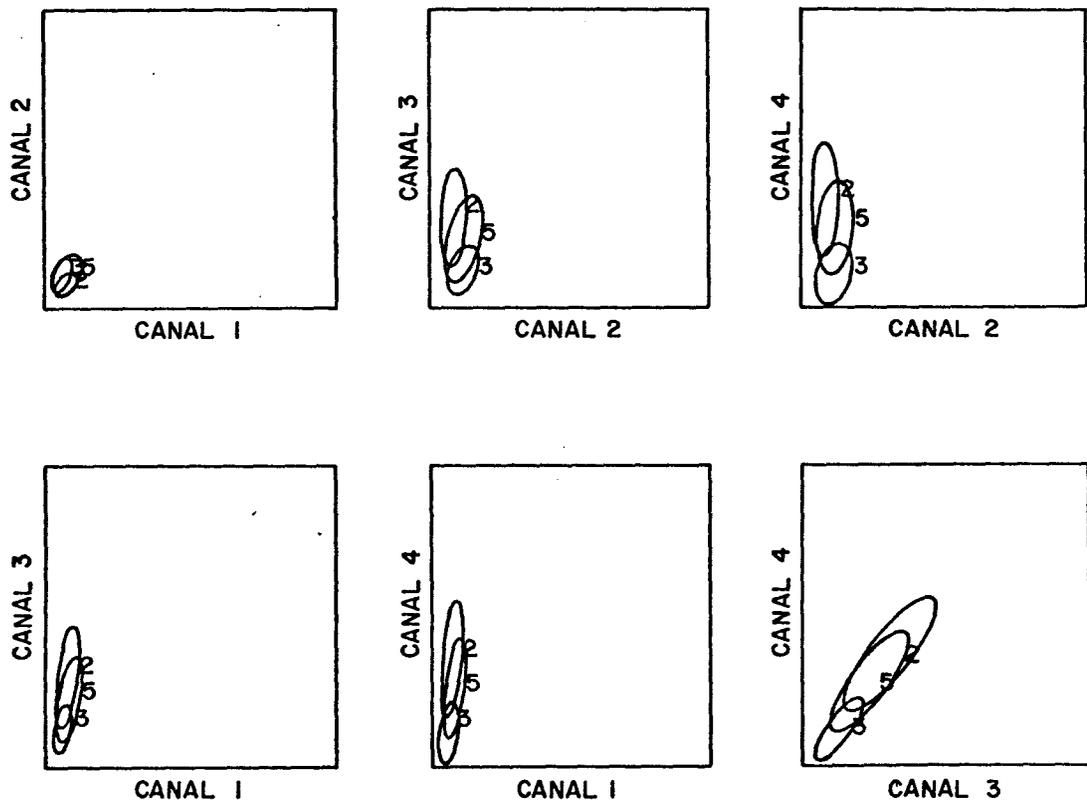


Fig. 4.8 - Elipses de contorno das classes trigo, solo, pasto.

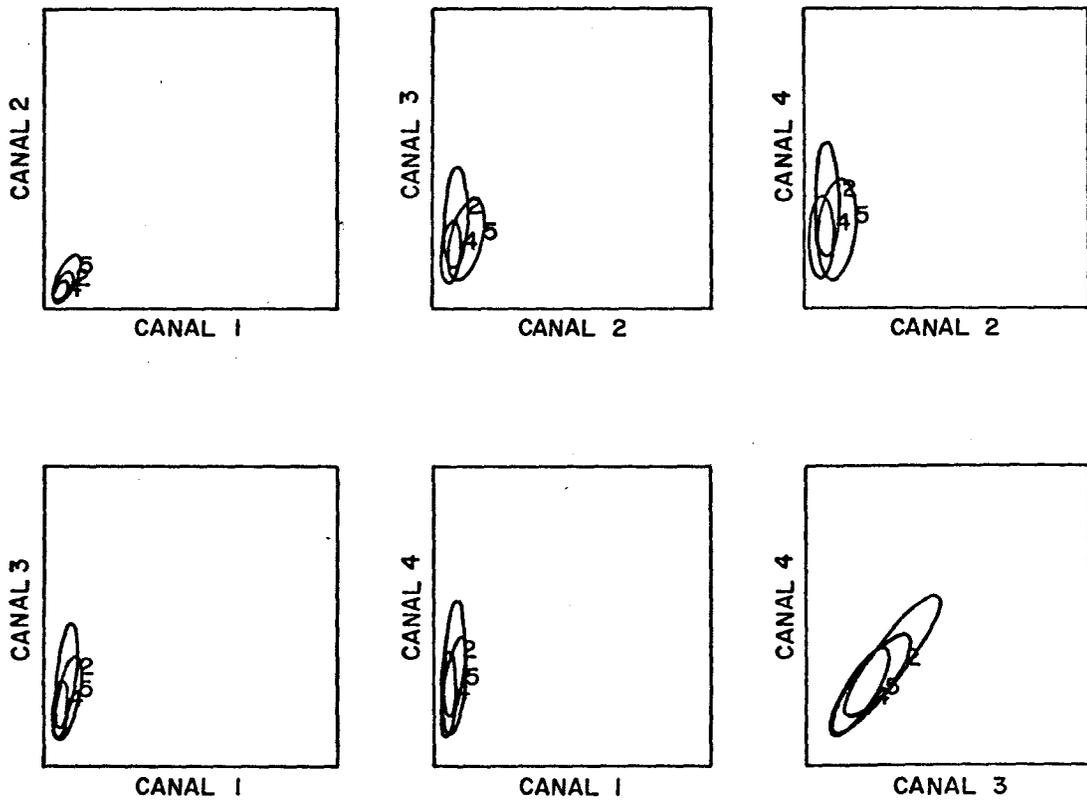


Fig. 4.9 - Elipses de contorno das classes trigo, mata, pasto.

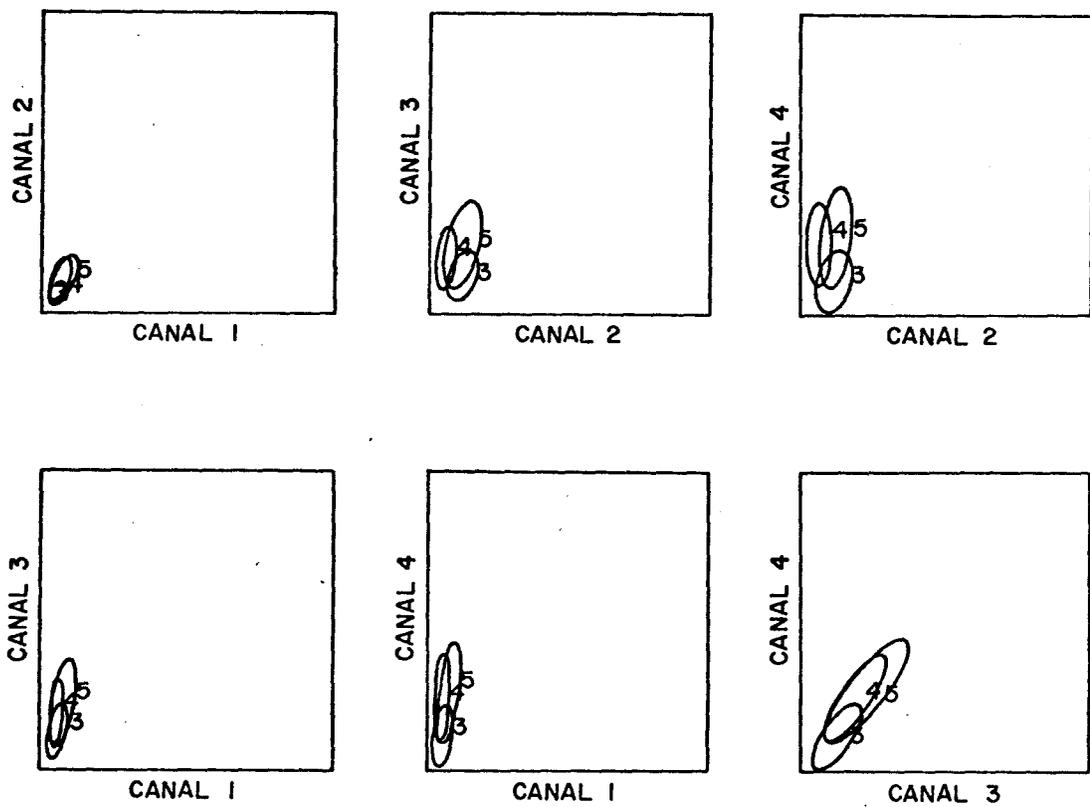


Fig. 4.10 - Elipses de contorno das classes solo, mata, pasto.

Entretanto, dispondo de cinco classes puras, podem-se obter, usando três delas por vez, dez combinações de classes, e, portanto, dez geometrias a analisar.

Pelo modelo de regressão linear, com dois canais e três classes, têm-se:

$$y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \epsilon_1 \quad (4.1)$$

$$y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \epsilon_2 \quad (4.2)$$

ou em forma matricial $\underline{y} = \underline{A}\underline{x} + \underline{\epsilon}$,

onde:

$\underline{y} = (y_1, y_2)^T$ é o vetor que representa o sinal refletido por um "pixel" mistura;

$(a_{1j}, a_{2j})^T$ é o vetor sinal médio da i -ésima classe; e

$(x_1, x_2, x_3)^T$ é o vetor proporção onde cada componente representa a proporção de uma classe pura no "pixel" mistura.

Utilizando a restrição de igualdade nas proporções, tem-se um sistema determinado com 3 equações e 3 incógnitas.

As medidas RMIN, DIVSOM, MIN(YNOR), assim como os ângulos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, dependem da geometria dos sinais e são obtidas utilizando-se as equações apresentadas no capítulo anterior.

Para as medidas restantes, além da geometria, considera-se o modelo de regressão.

Com o objetivo de simplificar os cálculos, a matriz de covariância dos vetores observados, \underline{y} será considerada a identidade.

Da restrição de igualdade das proporções $x_1+x_2+x_3 = 1$, tem-se $x_1 = 1-x_2-x_3$ que, substituída nas Equações 4.1 e 4.2, fornece o seguinte sistema:

$$z_1 = y_1 - a_{11} = (a_{12} - a_{11}) x_2 + (a_{13} - a_{11}) x_3 + \epsilon_1, \quad (4.3)$$

$$z_2 = y_2 - a_{21} = (a_{22} - a_{21}) x_2 + (a_{23} - a_{21}) x_3 + \epsilon_2, \quad (4.4)$$

ou, em forma matricial:

$$\underline{z} = \underline{H}_1 \underline{x}' + \underline{\epsilon} \quad (4.5)$$

onde:

$$\underline{z} = (z_1, z_2)^T$$

$$\underline{x}' = (x_2, x_3)^T$$

$$\underline{H}_1 = \begin{bmatrix} a_{12} - a_{11} & a_{13} - a_{11} \\ a_{22} - a_{21} & a_{23} - a_{21} \end{bmatrix}$$

De forma análoga, substituindo x_2 ou x_3 da restrição de igualdade, nas Equações 4.1 e 4.2, obtêm-se \underline{H}_2 ou \underline{H}_3 .

Observa-se a partir da Equação 4.5 que a matriz de covariância de \underline{x}' é $(\underline{H}_1^T \underline{I} \underline{H}_1)^{-1}$.

A diagonal dessa matriz fornece as variâncias de x_2 e x_3 , assim como a diagonal das matrizes $(\underline{H}_2^T \underline{I} \underline{H}_2)^{-1}$ e $(\underline{H}_3^T \underline{I} \underline{H}_3)^{-1}$ fornece as variâncias de x_1, x_3 e x_1, x_2 .

As variâncias de x_1, x_2 e x_3 , representadas por $VAR(X_1)$, $VAR(X_2)$ e $VAR(X_3)$, são medidas da qualidade da estimativa. Variâncias altas não fornecem boas estimativas.

Representam-se por AUT1, AUT2, AUT3 os números de condição de $(\underline{H}_1^T \underline{I} \underline{H}_1)$, $(\underline{H}_2^T \underline{I} \underline{H}_2)$ e $(\underline{H}_3^T \underline{I} \underline{H}_3)$, finalizando a obtenção das medidas de qualidade da geometria dos sinais.

4.2 - RELAÇÕES ENTRE AS MEDIDAS DE QUALIDADE

As relações entre as medidas de qualidade da geometria dos sinais são apresentadas aqui através de tabelas e gráficos.

A Tabela 4.1 mostra os valores das médias e matrizes de covariância para cinco classes isoladas. Esses parâmetros estatísticos

cos foram obtidos por intermédio do sistema I-100, órbita 220, ponto 32, passagem de 4/9/79, utilizando-se os canais MSS4 e MSS5 aqui denominados CANAL 1 e CANAL 2.

TABELA 4.1

DADOS OBTIDOS UTILIZANDO OS CANAIS 1 E 2 DO LANDSAT

CLASSES	CANAIS	MÉDIA	COVARIÂNCIA	
Água	1	32,08	4,23	0,23
	2	73,12	0,23	9,29
Trigo	1	17,32	3,56	1,66
	2	20,10	1,66	4,63
Solo	1	13,89	2,99	3,00
	2	29,03	3,00	8,98
Mata	1	12,46	1,87	0,91
	2	15,06	0,91	3,64
Pasto	1	19,36	4,15	3,41
	2	29,35	3,41	10,68

Um programa denominado "Geometria dos Sinais Médios" foi desenvolvido com a finalidade de fornecer as medidas de qualidade expostas na Tabela 4.2. Nela são apresentados os resultados das dez com binações que se formam com as cinco classes disponíveis três a três.

A partir dos resultados da Tabela 4.2 são elaborados al guns gráficos (Figura 4.11 a 4.16) relacionando as geometrias.

A variação do número de condição AUT1 em relação ao ângulo θ_1 , melhor visualizado ao usar o módulo da cotangente deste ângu

lo, é apresentada na Figura 4.11. Observa-se que, quando o módulo da cotangente é grande, o ângulo é próximo de 0° ou 180° e, conseqüentemente, os vetores que o definem e formam a matriz \underline{H}_1 são quase linearmente dependentes; o número de condição da matriz $\underline{H}_1^T \underline{H}_1$, AUT1, tende a ser muito grande.

TABELA 4.2

DADOS OBTIDOS ATRAVÉS DO PROGRAMA "GEOMETRIA DOS SINAIS"

MEDIDAS DE QUALIDADE COMBINAÇÕES	YNOR1	YNOR2	YNOR3	COS ANG1	COS ANG2	COS ANG3	AUT1	AUT2	AUT3	VARX1	VARX2	VARX3
1,2,3	32,79	6,58	5,70	0,99283	0,80315	0,72620	16,85	9,85	7,41	$9,3 \times 10^{-4}$	$2,3 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-2}$
1,2,4	26,18	2,99	3,33	0,99852	0,87963	0,90418	36,99	16,73	20,71	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-1}$	$9,0 \times 10^{-2}$
1,2,5	2,99	2,62	0,52	0,99994	0,99832	0,99704	180,00	109,82	76,38	$1,1 \times 10^{-1}$	2,6	3,76
1,3,4	13,61	3,12	4,01	0,99786	0,95845	0,97505	31,53	12,86	20,64	$5,4 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-1}$	$6,2 \times 10^{-2}$
1,3,5	42,95	5,16	4,93	0,99412	0,43472	0,33467	18,44	9,69	8,84	$5,4 \times 10^{-4}$	$3,8 \times 10^{-2}$	$4,1 \times 10^{-1}$
1,4,5	7,58	2,64	1,96	0,99907	0,99233	0,98608	48,49	33,30	19,32	$1,7 \times 10^{-2}$	$1,4 \times 10^{-1}$	$2,6 \times 10^{-1}$
2,3,4	4,32	8,67	6,34	0,42309	0,89214	0,78679	1,74	4,54	3,79	$5,4 \times 10^{-2}$	$1,3 \times 10^{-2}$	$2,5 \times 10^{-2}$
2,3,5	9,11	5,27	5,22	0,83438	0,30343	0,27203	3,33	1,91	1,86	$1,2 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	$3,7 \times 10^{-2}$
2,4,5	2,19	3,66	4,95	0,85244	0,95006	0,97303	3,73	8,56	9,75	$2,1 \times 10^{-1}$	$7,5 \times 10^{-2}$	$4,1 \times 10^{-2}$
3,4,5	4,79	13,86	5,41	0,15975	0,94011	0,48667	2,61	5,74	3,42	$4,3 \times 10^{-2}$	$5,2 \times 10^{-3}$	$3,4 \times 10^{-2}$

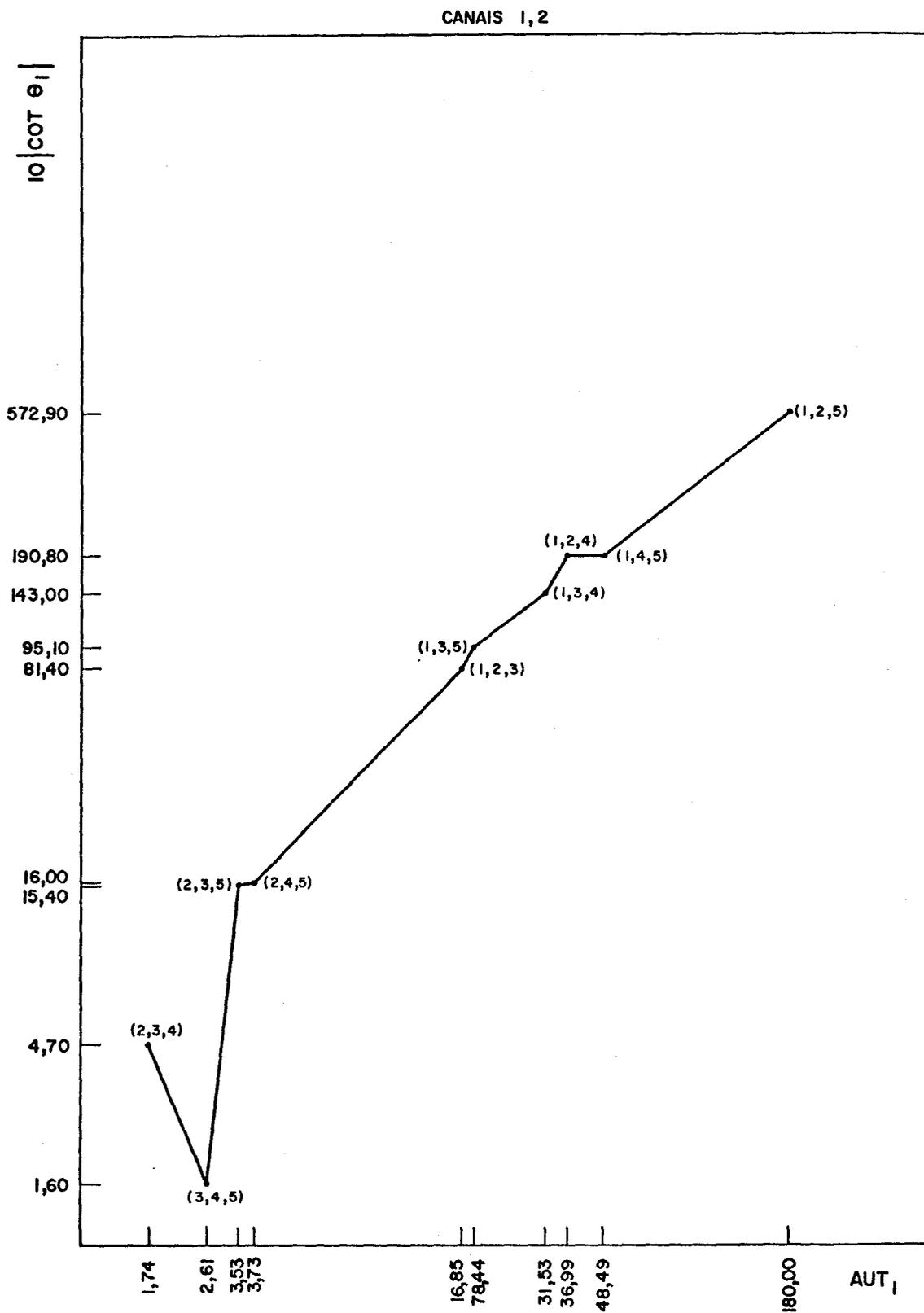


Fig. 4.11 - Gráfico $10|\cot \theta_1| : AUT_1$

A Figura 4.12 mostra a relação entre o número de condição AUT1 e a soma das variâncias dos estimadores x_2 e x_3 , obtidas da matriz de covariância $(H_1^T H_1)^{-1}$. Verifica-se uma relação direta entre os dois parâmetros.

O gráfico apresentado na Figura 4.13 relaciona ângulos e variâncias. Observa-se, no exemplo dado, que o módulo da cotangente do ângulo tende a crescer com a soma das variâncias dos estimadores.

Os três últimos gráficos (Figura 4.14 a 4.16) relacionam a menor distância de um vértice do triângulo, determinado pelas três classes, à combinação convexa dos demais, $\text{MIN}(\text{YNOR})$, com a soma dos números de condição ($\text{AUT1} + \text{AUT2} + \text{AUT3}$), com a soma das variâncias ($\text{VARX1} + \text{VARX2} + \text{VARX3}$) e com o maior dos módulos da cotangente ($\text{MAX}(|\text{COT}\theta|)$), respectivamente.

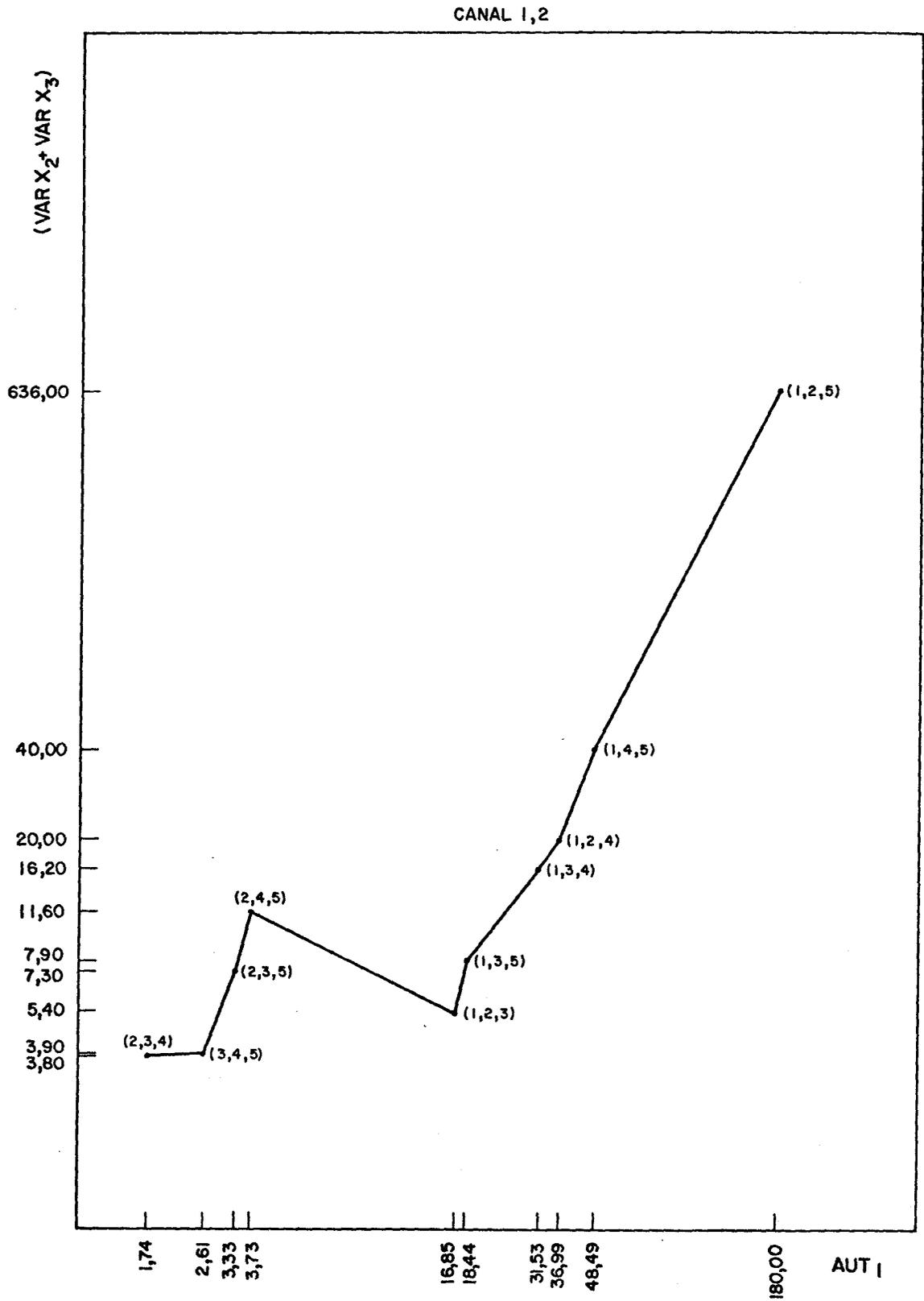


Fig. 4.12 - Gráfico $(VAR X_2 + VAR X_3)$: AUT_1 .

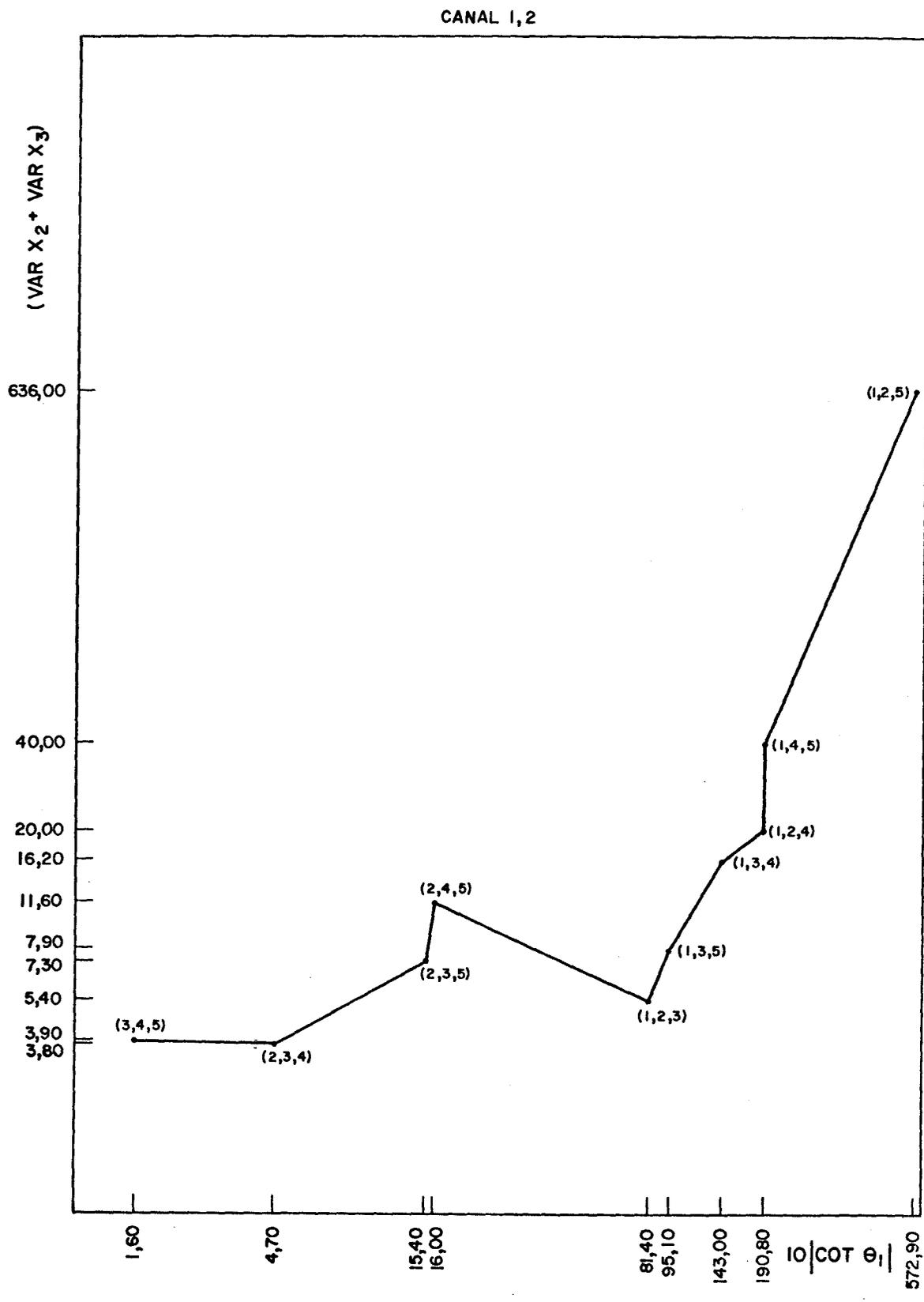


Fig. 4.13 - Gráfico $(VARX_2 + VARX_3)$: $10|COT \theta_1|$.

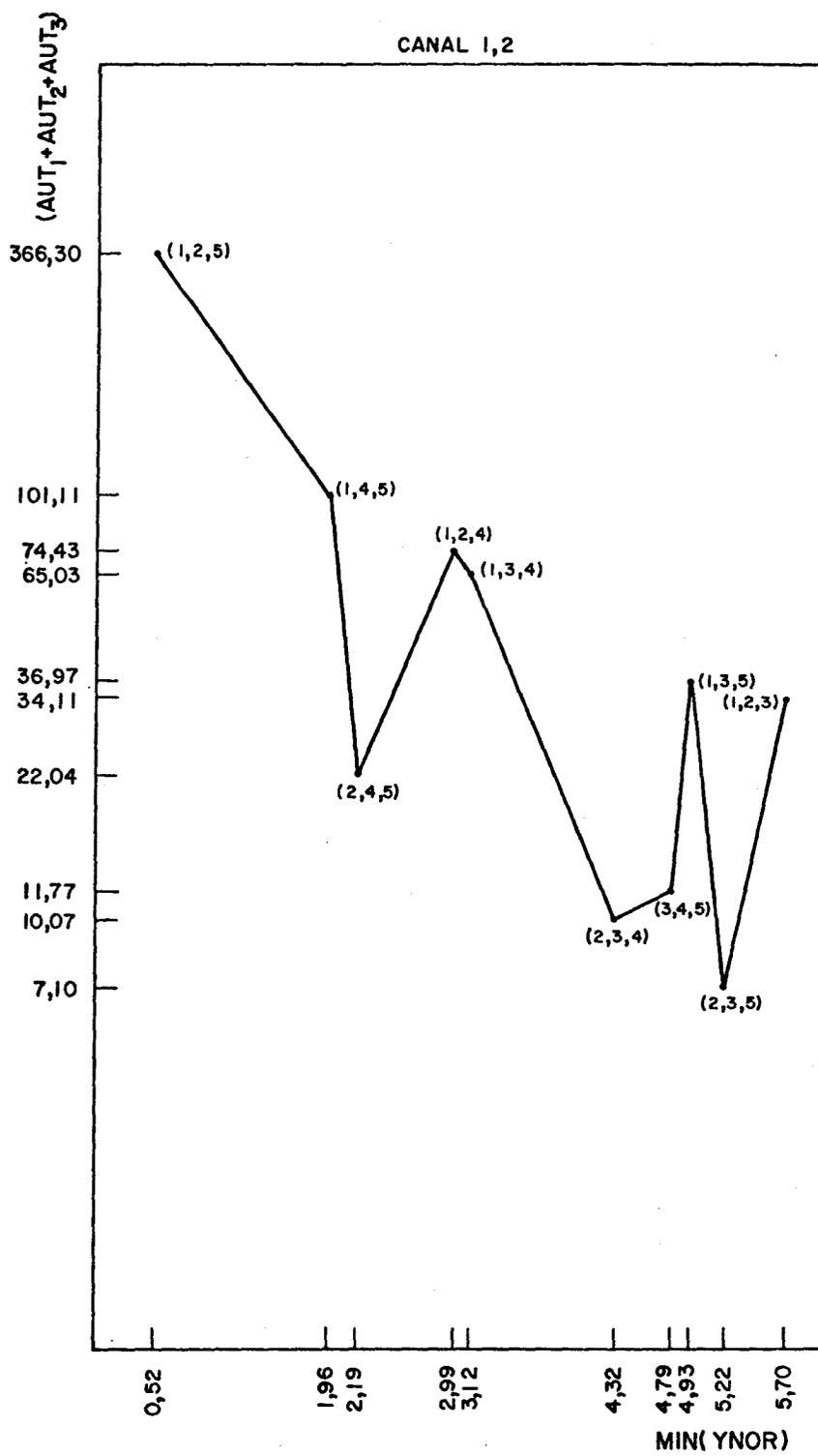


Fig. 4.14 - Gráfico $(AUT_1 + AUT_2 + AUT_3)$: MIN(YNOR).

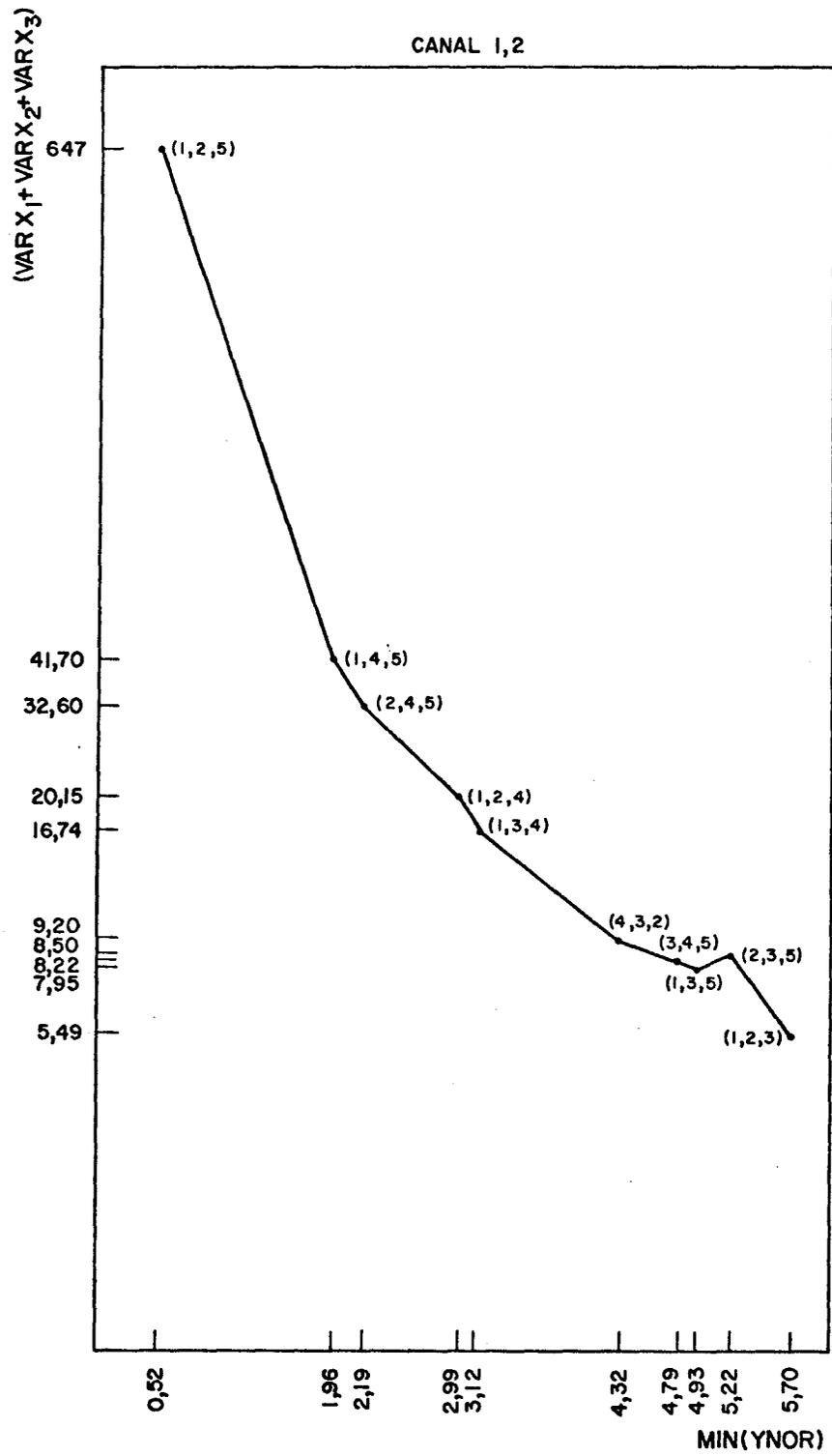


Fig. 4.15 - Gráfico $(VAR X_1 + VAR X_2 + VAR X_3)$: $MIN(YNOR)$.

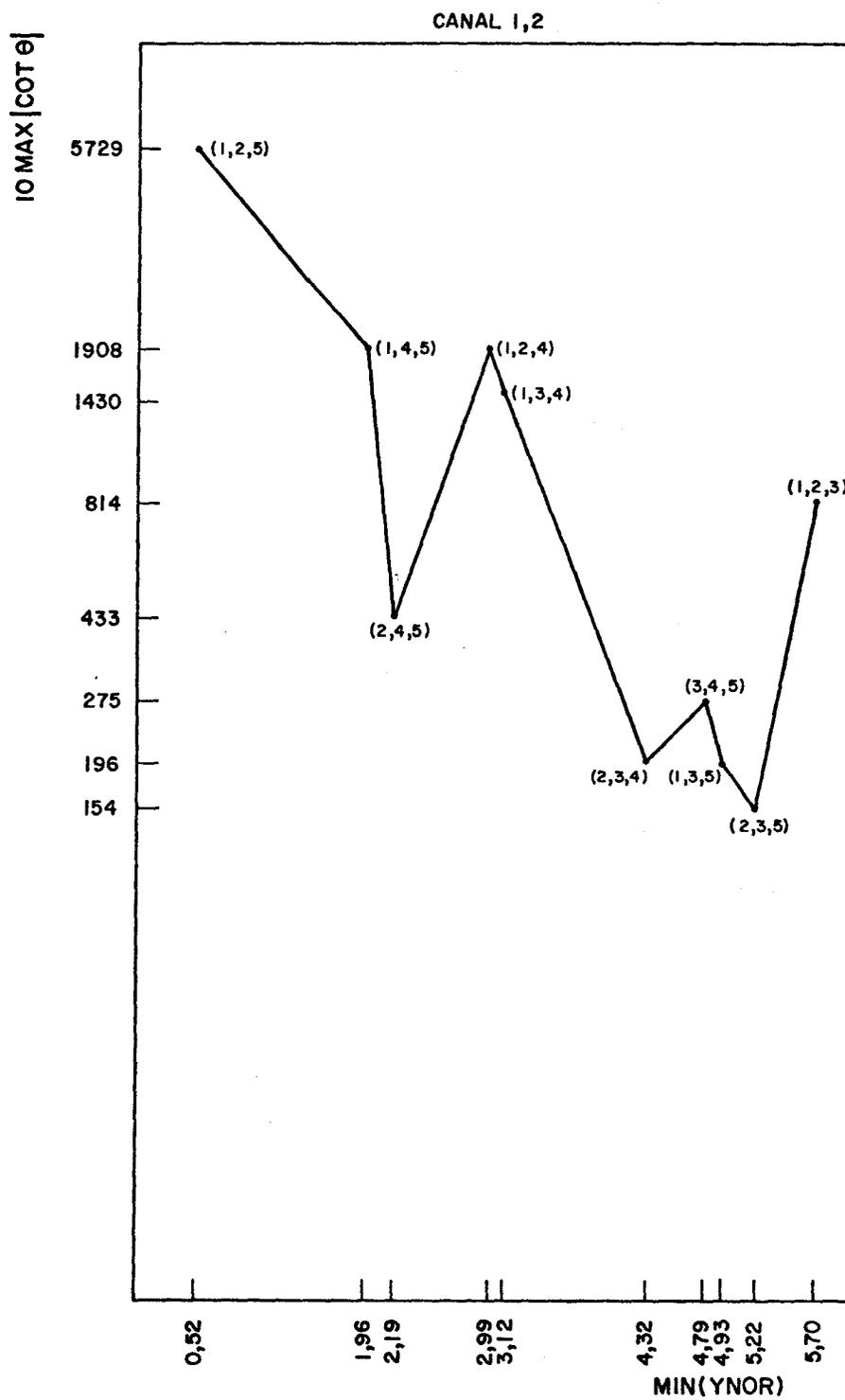


Fig. 4.16 - Gráfico MAX |COT θ| : MIN(YNOR).

O que se observa nesses últimos gráficos é uma relação inversa entre os parâmetros $\max |COT\theta|$, soma dos números de condição e soma das variâncias com o valor $\text{MIN}(Y_{\text{NOR}})$.

Verifica-se que em todos os gráficos a combinação água, trigo, pasto (1,2,5) apresenta valores altos para o número de condição, para as variâncias e para o módulo da cotangente do ângulo, ao passo que $\text{MIN}(Y_{\text{NOR}})$ tem valor baixo. Dado um vetor observado, y , pode-se dizer então que, dentre as dez geometrias, esta é a que fornecerá piores estimativas para o vetor proporção.

4.3 - COMENTÁRIOS FINAIS

Resultados obtidos e apresentados neste trabalho, por meio de gráficos e tabelas, mostram que é possível adquirir informação útil sobre as estimativas de proporções de classes a partir dos sinais envolvidos no "pixel" mistura e suas relações com os demais.

Propuseram-se novas medidas de qualidade que permitem prever as variâncias dos estimadores a partir da geometria dos vetores média e matrizes de covariância das classes envolvidas.

Como continuação deste trabalho seria útil desenvolver um processo de simulação que permitisse relacionar as dispersões das estimativas, sob restrições de igualdade e desigualdade, com as medidas de qualidade propostas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASU, J.P.; BASU, R. Estimation of given populations when observable units contain several populations. *IEEE Transactions on systems, man and cybernetics*, SMC-6(11):775-777, Nov. 1976.
- HORWITZ, H.M.; LEWIS, J.T.; PENTLAND, A.P. *Estimating proportions of objects from multispectral scanner data; final report*. Ann Arbor, MI, ERIM, 1975. 117 p. (NASA CR-ERIM 109600.13-F).
- HORWITZ, H.M.; NALEPKA, R.F.; HYDE, P.D.; MORGENSTERN, J.P. Estimating the proportions of objects within a single resolution element of a multispectral scanner. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON REMOTE SENSING OF ENVIRONMENT, 7., Ann Arbor, MI, 1971. *Proceedings*. Ann Arbor, MI, Willow Run Laboratories, 1971, p. 77-140.
- RUST, B.W.; BURRUS, W.R. Linear estimation. In ——— *Mathematical programming and numerical solution of linear equations*. New York, NY, Elsevier, C. 1972. cap. 2, p. 30-67.
- SALVATO JUNIOR, P. Iterative techniques to estimate signature vectors for mixture processing of multispectral data. In: CONFERENCE ON MACHINE PROCESSING OF REMOTELY SENSED DATA, West Lafayette, IN, 1973. *Proceedings*. West Lafayette, IN, Purdue University, 1973, p. 3B-48-3B-62.