

Capítulo 7

Topologia Digital

A *Topologia Digital* estuda a aplicação das noções definidas em Topologia sobre imagens binárias. Neste capítulo vamos introduzir algumas noções básicas de Topologia Digital, tais como conexidade, buraco, pontos isolados, bordas, árvores de adjacência, homotopia, etc.

Existem várias formas de apresentar os conceitos de Topologia Digital. Uma das mais conhecidas consiste em estabelecer a noção de *adjacência* entre pontos e, a partir desta definição, construir os demais conceitos e propriedades [KonRos89].

Aqui, introduzimos a Topologia Digital a partir da noção de *espaço morfológico*, que se apresenta como uma simplificação da noção de espaço topológico.

7.1 Conexidade

No capítulo anterior deu-se o nome de abertos aos invariantes de uma abertura. De uma maneira equivalente pode-se dar o nome de aberto aos subconjuntos de uma coleção sup-fechada (Proposição 3.9), desde que a coleção dos invariantes de uma abertura é sup-fechada (Proposição 6.2). Estes abertos, que chamaremos de *morfológicos*, diferem dos abertos de uma topologia como se pode verificar a partir das seguintes definições que incluem a de *morfologia*.

Definição 7.1 (morfologia, abertos morfológicos e espaço morfológico) – Uma *morfologia* \mathcal{M} num conjunto E é uma subcoleção sup-fechada de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ que contem E . Os subconjuntos em \mathcal{M} chamam-se de *abertos (morfológicos) segundo* \mathcal{M} . Em particular, \emptyset e E são abertos (morfológicos). Um *espaço morfológico* é um par (E, \mathcal{M}) onde E é um conjunto e \mathcal{M} é uma morfologia em E . \square

Quando não houver dúvida sobre a morfologia \mathcal{M} em E usada, no lugar de dizer que o subconjunto A de E é um aberto segundo a morfologia \mathcal{M} , diremos simplesmente que A é um aberto (morfológico) em E e que E é um espaço morfológico.

Definição 7.2 (topologia, abertos topológicos e espaço topológico) – Uma *topologia* \mathcal{T} num conjunto E é uma morfologia em E tal que a interseção de dois subconjuntos em \mathcal{T} é um subconjunto em \mathcal{T} . Os subconjuntos em \mathcal{T} chamam-se de *abertos (topológicos) segundo* \mathcal{T} . Em particular, \emptyset e E são abertos (topológicos). Um *espaço topológico* é um par (E, \mathcal{T}) onde E é um conjunto e \mathcal{T} é uma topologia em E . \square

Das definições acima, concluímos que todo espaço topológico é também um espaço morfológico. Mas, nem todo espaço morfológico é um espaço topológico. Ou ainda, todo aberto topológico segundo uma topologia \mathcal{T} é também um aberto morfológico segundo \mathcal{T} .

Por exemplo, sejam A e B dois subconjuntos de E tais que $A \cup B = E$. Então, a subcoleção $\mathcal{M} = \{\emptyset, A, B, E\}$ é uma *morfologia em* E . Os subconjuntos \emptyset, A, B e E são *abertos morfológicos segundo* \mathcal{M} . A subcoleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, B, A \cap B, E\}$ é uma *topologia no conjunto* E . Os subconjuntos $\emptyset, A, B, A \cap B$ e E são *abertos topológicos* (e também morfológicos) *segundo* \mathcal{T} .

Um *fechado (morfológico) segundo uma morfologia* (resp. *fechado (topológico) segundo uma topologia*) é o complemento de um aberto segundo esta morfologia (resp. topologia).

Exercício 7.1 (propriedade dos fechados morfológicos) – Mostre que os fechados morfológicos em E formam uma subcoleção *inf-fechada de* $(\mathcal{P}(E), \subset)$ (i.e., uma *família de Moore*). Em particular, mostre que \emptyset e E são fechados morfológicos. \square

A noção de morfologia é importante porque a partir dela podemos construir a definição de conexidade morfológica, diretamente inspirada da conexidade em topologia.

Inicialmente, é bom observar que um subconjunto de um espaço morfológico E pode ser simultaneamente aberto e fechado. Por exemplo os subconjuntos \emptyset e E são sempre morfológicamente abertos e fechados. Segundo a morfologia $\mathcal{P}(E)$, todo subconjunto de E é morfológicamente aberto e fechado, desde que todo subconjunto e seu complemento pertencem à $\mathcal{P}(E)$. Esta observação leva à noção de conexidade.

Definição 7.3 (espaço morfológico conexo) – Um espaço morfológico (E, \mathcal{M}) é *conexo segundo* \mathcal{M} quando \emptyset e E são os dois únicos subconjuntos de E abertos e fechados. \square

Quando não houver dúvida sobre a morfologia \mathcal{M} em E usada, diremos simplesmente que E é um espaço (morfológico) conexo.

A idéia de um conjunto conexo é a de um conjunto formado por partes não disjuntas, é o que esclarece a seguinte proposição.

Proposição 7.1 (definição equivalente de espaço conexo) – Um espaço morfológico (E, \mathcal{M}) é *conexo segundo* \mathcal{M} se e somente se *não* existem dois abertos segundo \mathcal{M} , A e B , disjuntos e não vazios, tal que $E = A \cup B$. \square

Prova – Seja (E, \mathcal{M}) um espaço morfológico, então

E é não conexo segundo $\mathcal{M} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{P}(E) - \{\emptyset, E\}$, aberto e fechado segundo \mathcal{M}
(definição de espaço morfológico conexo)

$\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{M} - \{\emptyset\}$, $A \cap B = \emptyset$ e $E = A \cup B$.

($B = A^c$, definição de fechado segundo \mathcal{M} e complementaridade provam \Rightarrow)

($A = B^c$ e definição de fechado segundo \mathcal{M} provam \Leftarrow)

\square

Para passar da noção de espaço conexo para subconjunto conexo, precisamos introduzir a noção de subcoleção induzida.

Sejam E um conjunto e \mathfrak{B} uma subcoleção de $\mathcal{P}(E)$. Seja X um subconjunto de E , a subcoleção de $\mathcal{P}(X)$, denotada $X \cap \mathfrak{B}$ e dada por

$$X \cap \mathfrak{B} = \{B' \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \mathfrak{B}, B' = X \cap B\},$$

chama-se de *subcoleção induzida em X por \mathfrak{B}* .

Exercício 7.2 (propriedade de subcoleções induzidas) – Sejam X_1 e X_2 dois subconjuntos de um conjunto E e \mathfrak{B} uma subcoleção de $\mathcal{P}(E)$. Sejam $\mathfrak{B}_1 = X_1 \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2 = X_2 \cap \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}_{21} = X_2 \cap \mathfrak{B}_1$. Mostre que se $X_2 \subset X_1$ então $\mathfrak{B}_{21} = \mathfrak{B}_2$. Este resultado é uma consequência da seguinte observação. Se X_1 e X_2 tocam B , se B_1 é a interseção de X_1 com B , se B_2 é a interseção de X_2 com B , e se X_2 está contido em X_1 , como mostra a Figura 7.1, então B_2 é a interseção de X_2 com B_1 . \square

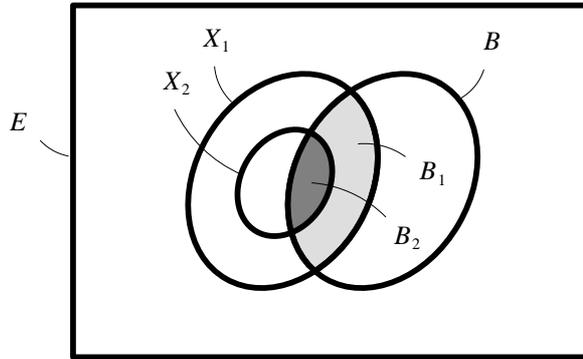


Fig. 7.1 – Propriedade dos elementos de subcoleções induzidas.

Exercício 7.3 (propriedade de uma subcoleção induzida por uma morfologia) – Seja (E, \mathcal{M}) um espaço morfológico. Usando a distributividade generalizada da união e da interseção, prove que se X é um subconjunto de E então a subcoleção $X \cap \mathcal{M}$, induzida em X por \mathcal{M} , é uma morfologia. Em outros termos, se A é um aberto em E então $X \cap A$ é um aberto em X . \square

Observamos o seguinte. Sejam X_1 e X_2 dois subconjuntos de um espaço morfológico (E, \mathcal{M}) tais que $X_2 \subset X_1$. Pela propriedade enunciada no Exercício 7.3, se A é um aberto em X_1 , isto é, se A é um aberto segundo $\mathcal{M}_1 = X_1 \cap \mathcal{M}$, então $X_2 \cap A$ é um aberto segundo $X_2 \cap \mathcal{M}_1$. Mas, pela propriedade enunciada no Exercício 7.2, isto significa que $X_2 \cap A$ é um aberto segundo $X_2 \cap \mathcal{M}$. Em outros termos, se A é um aberto em X_1 então $X_2 \cap A$ é um aberto em X_2 .

Definição 7.4 (subconjunto conexo de um espaço morfológico) – Um subconjunto X de um espaço morfológico (E, \mathcal{M}) é um *subconjunto conexo*, quando X é um espaço morfológico conexo segundo a morfologia induzida em X por \mathcal{M} . \square

Exercício 7.4 (conexidade e indução) – Sejam (E_1, \mathcal{M}_1) e (E_2, \mathcal{M}_2) dois espaços morfológicos tais que $E_2 \subset E_1$ e \mathcal{M}_2 é induzida em E_2 por \mathcal{M}_1 . Mostre que se $X \subset E_2$ então X é um subconjunto conexo de (E_1, \mathcal{M}_1) se e somente se X é um subconjunto conexo de (E_2, \mathcal{M}_2) . \square

Daqui para frente, E será o retângulo $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ de \mathbf{Z}^2 (ver Capítulo 4). Para definir a noção de conexidade digital de um subconjunto Y de E a partir da noção de conexidade (morfológica), vamos introduzir um segundo conjunto denotado $2E$ e dado por

$$2E = \mathbf{Ret}(2n_1, 2n_2),$$

e equipa-lo de uma morfologia por meio de uma dilatação conveniente.

Denotaremos por δ_{\square} a dilatação (i.t. ou c.i.t) sobre $\mathcal{P}(2E)$, pelo quadrado 3×3 de $2E$ centralizado na origem. Denotaremos por a e b as funções de E em $\mathcal{P}(2E)$ definidas por

$$a(y) = \delta_{\square}(\{2y\}) \quad \text{e} \quad b(y) = \delta_{\square}(\{2y\})^c \quad (y \in E).$$

Denotaremos por δ_a e ${}_b\epsilon$, a dilatação e a erosão de $\mathcal{P}(E)$ em $\mathcal{P}(2E)$ definidas por

$$\delta_a(Y) = \bigcup_{y \in Y} a(y) \quad \text{e} \quad {}_b\epsilon(Y) = \bigcap_{y \in Y^c} b(y) \quad (Y \in \mathcal{P}(E)).$$

Observamos que δ_a e ${}_b\epsilon$ são dois *operadores de ampliação* mutuamente duais por complementação e que ${}_b\epsilon = \epsilon_{b^c}$.

Com estes ingredientes podemos agora definir a noção de conexidade digital.

Definição 7.5 (conexidade digital de um subconjunto) – Um subconjunto Y de E é dito *4-conexo* (resp. *8-conexo*) se e somente se ${}_b\epsilon(Y)$ (resp. $\delta_a(Y)$) é um subconjunto conexo do espaço morfológico $(2E, \delta_a(\mathcal{P}(E)))$. Um subconjunto que não é 4-conexo (resp. 8-conexo) é dito *4-desconexo* (resp. *8-desconexo*). \square

Chamaremos o espaço morfológico $(2E, \delta_a(\mathcal{P}(E)))$, de *espaço de vizinhança 8*.

Sejam ϵ_a e ${}_b\delta$ a erosão e a dilatação formando, respectivamente, com δ_a e ${}_b\epsilon$ duas conexões de Galois (ϵ_a, δ_a) e $({}_b\delta, {}_b\epsilon)$. A primeira é uma conexão de Galois entre $(\mathcal{P}(2E), \supseteq)$ e $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, a segunda entre $(\mathcal{P}(2E), \subseteq)$ e $(\mathcal{P}(E), \supseteq)$. Neste caso, ϵ_a e ${}_b\delta$ são dados por

$$\epsilon_a(X) = \{y \in E : a(y) \subseteq X\} \quad (X \in \mathcal{P}(2E))$$

$${}_b\delta(X) = \{y \in E : X \subseteq b(y)\}^c \quad (X \in \mathcal{P}(2E)).$$

Observamos que ${}_b\delta = \delta_{b^c}$.

Observamos também que $(\epsilon_a)(\delta_a) = \iota$ e $({}_b\delta)({}_b\epsilon) = \iota$, e que as restrições de ϵ_a a $\delta_a(\mathcal{P}(E))$ e de ${}_b\delta$ a ${}_b\epsilon(\mathcal{P}(E))$ são dois isomorfismos de reticulados.

Exercício 7.5 (propriedade dos abertos no espaço de vizinhança 8) – Mostre que para todo Y em $\mathcal{P}(E)$ e todo aberto A em $\delta_a(Y)$,

$${}_b\epsilon(Y) \subseteq A \Rightarrow \delta_a(Y) \subseteq A. \quad \square$$

Prova – Para todo Y em $\mathcal{P}(E)$,

$${}_b\epsilon(Y) = \emptyset \Rightarrow {}_b\delta({}_b\epsilon(Y)) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow Y = \emptyset,$$

(propriedade da dilatação)

$$({}_b\delta)({}_b\epsilon) = \iota$$

isto é, $Y \neq \emptyset \Rightarrow {}_b\epsilon(Y) \neq \emptyset$.

Para todo Y e Y' em $\mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned} Y \cap Y'^c \neq \emptyset &\Rightarrow {}_b\epsilon(Y \cap Y'^c) \neq \emptyset && \text{(resultado anterior)} \\ &\Leftrightarrow {}_b\epsilon(Y) \cap {}_b\epsilon(Y'^c) \neq \emptyset && ({}_b\epsilon \text{ é uma erosão}) \\ &\Leftrightarrow {}_b\epsilon(Y) \cap \delta_a(Y')^c \neq \emptyset, && (\delta_a \text{ e } {}_b\epsilon \text{ são mutuamente duais por complementação}) \end{aligned}$$

isto é, pela consistência entre a interseção e a inclusão, ${}_b\epsilon(Y) \subset \delta_a(Y') \Rightarrow Y \subset Y'$.

Para todo aberto A' segundo a morfologia $\delta_a(\mathcal{P}(E))$ e todo Y em $\mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned} {}_b\epsilon(Y) \subset A' &\Leftrightarrow {}_b\epsilon(Y) \subset \delta_a(\epsilon_a(A')) && (A' \in \delta_a(\mathcal{P}(E)) \text{ e } (\epsilon_a)(\delta_a) = \iota) \\ &\Rightarrow Y \subset \epsilon_a(A') && \text{(resultado anterior com } Y' = \epsilon_a(A')) \\ &\Rightarrow \delta_a(Y) \subset \delta_a(\epsilon_a(A')) && (\delta_a \text{ é isotônico}) \\ &\Rightarrow \delta_a(Y) \subset A', && (A' \in \delta_a(\mathcal{P}(E)) \text{ e } (\epsilon_a)(\delta_a) = \iota) \end{aligned}$$

isto é, ${}_b\epsilon(Y) \subset A' \Rightarrow \delta_a(Y) \subset A'$.

Para todo Y em $\mathcal{P}(E)$ e para todo aberto A em $\delta_a(Y)$, por definição de aberto, existe A' em $A' \in \delta_a(\mathcal{P}(E))$ tal que $A = A' \cap \delta_a(Y)$. Para todo Y em $\mathcal{P}(E)$ e para todo aberto A em $\delta_a(Y)$,

$$\begin{aligned} {}_b\epsilon(Y) \subset A &\Leftrightarrow {}_b\epsilon(Y) \subset A' \cap \delta_a(Y) && (A = A' \cap \delta_a(Y)) \\ &\Rightarrow {}_b\epsilon(Y) \subset A' && \text{(propriedade da interseção)} \\ &\Rightarrow \delta_a(Y) \subset A' && \text{(resultado anterior)} \\ &\Rightarrow \delta_a(Y) \cap \delta_a(Y) \subset A' \cap \delta_a(Y) && \text{(propriedade conjunta da interseção e da inclusão)} \\ &\Rightarrow \delta_a(Y) \subset A' \cap \delta_a(Y) && \text{(idempotência)} \\ &\Rightarrow \delta_a(Y) \subset A, && (A = A' \cap \delta_a(Y)) \end{aligned}$$

isto é, ${}_b\epsilon(Y) \subset A \Rightarrow \delta_a(Y) \subset A$. □

Exercício 7.6 (relação entre os dois tipos de conexidade digital) – Usando o resultado do Exercício 7.5, mostre que se Y for 4-conexo então ele será 8-conexo. □

Prova – Basta mostrar que se ${}_b\epsilon(Y)$ for um subconjunto conexo do espaço morfológico $(2E, \delta_a(\mathcal{P}(E)))$, então o subconjunto $\delta_a(Y)$ também o será.

Seja $A \subset \delta_a(Y)$ um aberto e fechado em $\delta_a(Y)$. O subconjunto $A \cap {}_b\epsilon(Y)$ será aberto e fechado em ${}_b\epsilon(Y)$, pois ${}_b\epsilon(Y)$ é contido em $\delta_a(Y)$ (ver a observação seguindo o Exercício 7.3). Como ${}_b\epsilon(Y)$ é conexo, teremos $A \cap {}_b\epsilon(Y) = {}_b\epsilon(Y)$ (pela definição de subconjunto conexo, não pode existir outro aberto e fechado não vazio, a não ser ${}_b\epsilon(Y)$). Portanto ${}_b\epsilon(Y) \subset A$. Então, pelo resultado do Exercício 7.5, $\delta_a(Y) \subset A$, isto é, $A = \delta_a(Y)$ e $\delta_a(Y)$ é conexo. □

A Figura 7.2 mostra um conjunto 4-desconexo e a Figura 7.3 mostra o mesmo conjunto 8-conexo. Na Figura 7.2, os quatro quadrados 3×3 são abertos segundo $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(5, 5)))$, suas interseções com $\delta_a(Y)^c$ formam quatro quadrados 1×1 que são abertos segundo a subcoleção induzida em ${}_b\epsilon(Y)$ por $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(5, 5)))$, como é possível formar com eles dois subconjuntos disjuntos, então Y não é 4-conexo. No entanto, na Figura 7.3, os quatro quadrados 3×3 são abertos segundo $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(5, 5)))$, suas interseções com $\delta_a(Y)$ formam os mesmos quatro quadrados 3×3 que são abertos segundo a subcoleção induzida em $\delta_a(Y)$ por $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(5, 5)))$, como não é possível formar com eles dois subconjuntos disjuntos, então Y é 8-conexo.

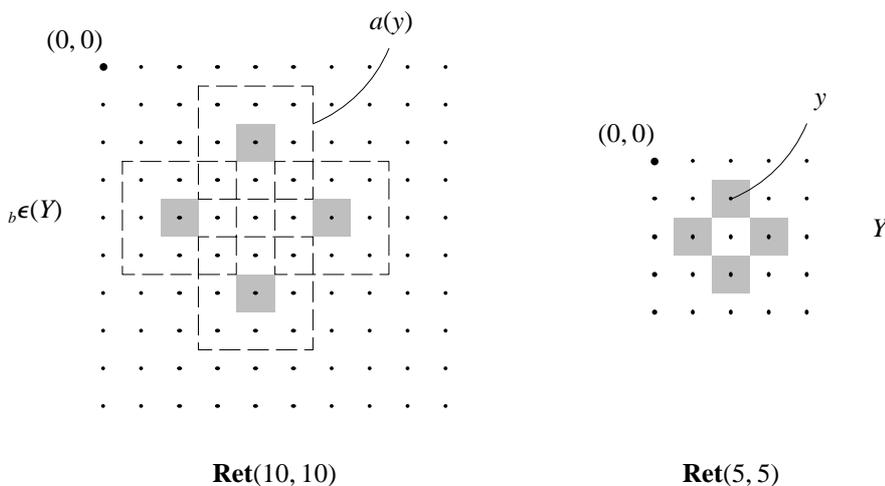


Fig. 7.2 – Um subconjunto 4–desconexo.

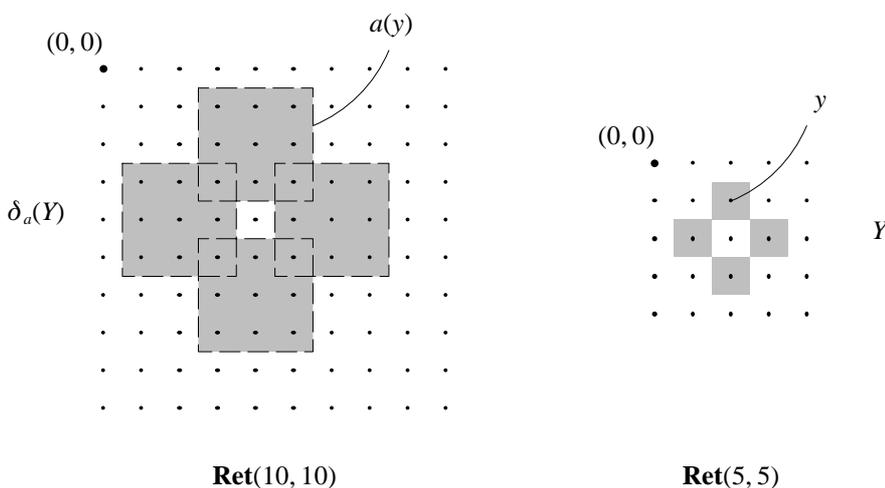


Fig. 7.3 – Um subconjunto 8–conexo.

A Figura 7.4 mostra um conjunto 4–conexo. Nesta figura, os dois quadrados 3×3 são abertos segundo $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(3, 4)))$, suas interseções com $\delta_a(Y^c)^c$ formam dois retângulos 1×2 que são abertos segundo a subcoleção induzida em $\delta_a(Y^c)^c$ por $\delta_a(\mathcal{P}(\mathbf{Ret}(3, 4)))$, como não é possível formar com eles dois subconjuntos disjuntos, então Y é 4–conexo.

A necessidade de se usar dois tipos de conexidade vai ser esclarecida após termos introduzido a noção de componente conexa. Esta noção decorre da definição de conexidade. Um dado subconjunto pode não ser conexo mas nele podemos distinguir partes conexas que chamaremos de componentes conexas.

Proposição 7.2 (união de uma família de subconjuntos conexos de um espaço morfológico) – Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos conexos de um espaço morfológico. Se existir um ponto x_0 comum a todos os X_i , então a união $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ será conexo. □

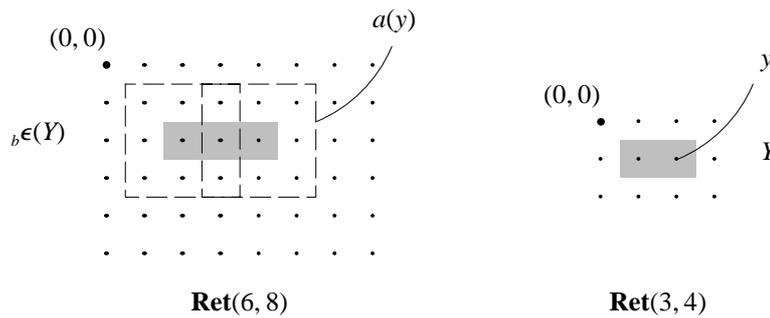


Fig. 7.4 – Um subconjunto 4-conexo.

Prova ([Lima76, p 92]) – Seja $A \subset X$ um aberto e fechado em X . Substituindo, se necessário, A por $S - A$ (que ainda será aberto e fechado), podemos supor que $x_0 \in A$. Para cada i em I , $A \cap X_i$ será aberto e fechado em X_i , pois X_i é contido em X (ver a observação seguindo o Exercício 7.3). Pela escolha de A e a hipótese sobre X_i , $A \cap X_i$ é também não vazio. Como X_i é conexo, para todo i em I , teremos $A \cap X_i = X_i$ (pela definição de subconjunto conexo, não pode ter outro aberto e fechado não vazio a não ser X_i). Portanto $X_i \subset A$, para todo i em I . Então, pela propriedade de união, $X = \bigcup_{i \in I} X_i \subset A$, isto é, $X = A$ e X é conexa. □

A Proposição 7.2 dá um sentido à noção de componente conexa dado um ponto num espaço morfológico.

Definição 7.6 (componente conexa dado um ponto num espaço morfológico) – Seja x um ponto de um espaço morfológico X . A *componente conexa* C_x dado x no espaço X é a união de todos os subconjuntos conexos do espaço X que contêm x . □

Pela definição de componente conexa dado um ponto, observamos que, para todo x em X , $x \in C_x$ e C_x é um subconjunto conexo de X (pela Proposição 7.2), e que X é um espaço conexo se e somente se ele é a componente conexa relativa a cada um de seus pontos.

Proposição 7.3 (princípio de maximalidade das componentes conexas) – A componente conexa C_x dado x num espaço morfológico X é o *maior* subconjunto conexo de X que contém x . Em outros termos, se $C_x \subset S \subset X$ e S é conexo então $C_x = S$. □

Prova – Sejam $x \in X$ e $\mathcal{C}_x = \{S \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)); S \text{ é conexo e } x \in S\}$, então pela definição de C_x e a propriedade de união, $C_x = \sup \mathcal{C}_x$ e $C_x \in \mathcal{C}_x$. Isto é, pelo resultado enunciado no Exercício 2.7, C_x é o maior elemento de \mathcal{C}_x . □

Definição 7.7 (componente conexa de um espaço morfológico) – Um subconjunto C de um espaço morfológico X é uma *componente conexa* C de X se e somente se por algum x em X , $C = C_x$, onde C_x é a componente conexa dado o ponto x . □

Em seguida, vamos verificar que as componentes conexas de um conjunto formam uma partição, isto é, elas recobrem o conjunto e são duas a duas disjuntas.

Proposição 7.4 (partição das componentes conexas) – As componentes conexas de um espaço morfológico X formam uma partição de X . □

Prova – Sejam C_i e C_j duas componentes conexas de um espaço morfológico X . Pela definição de componente conexa, existem x_i e x_j em X tais que $C_i = C_{x_i}$ e $C_j = C_{x_j}$ e

$$\begin{aligned}
 C_{x_i} \cap C_{x_j} \neq \emptyset &\Rightarrow \exists x \in X, x \in C_{x_i} \text{ e } C_{x_j} && \text{(definições de interseção e de vazio)} \\
 &\Rightarrow C_{x_i} \cup C_{x_j} \text{ é conexa} && \text{(Proposição 7.2)} \\
 &\Rightarrow C_{x_i} \cup C_{x_j} \text{ é conexa e contém } x_i \text{ e } x_j && (x \in C_x \text{ e propriedades da união)} \\
 &\Rightarrow C_{x_i} \cup C_{x_j} \text{ é conexa e contém } x_i \text{ e } x_j, \text{ e } C_{x_i} \text{ e } C_{x_j} \subset C_{x_i} \cup C_{x_j} && \text{(propriedade da união)} \\
 &\Rightarrow C_{x_i} = C_{x_i} \cup C_{x_j} \text{ e } C_{x_j} = C_{x_i} \cup C_{x_j} && \text{(Proposição 7.3)} \\
 &\Rightarrow C_{x_i} = C_{x_j}. && \text{(transitividade da igualdade)}
 \end{aligned}$$

Em outros termos, $C_i \neq C_j \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$.

Seja $(C_i)_{i \in I}$ a família de todas as componentes conexas do espaço X , temos

$$\begin{aligned}
 X &= \bigcup_{x \in X} \{x\} && \text{(decomposição de um conjunto como união de singletons)} \\
 &\subset \bigcup_{x \in X} C_x && (x \in C_x \text{ e propriedades da união)} \\
 &= \bigcup_{i \in I} C_i && \text{(definição de componente conexa)} \\
 &\subset X. && (C_i \subset X \text{ e propriedade da união)}
 \end{aligned}$$

Em outros termos, pela anti-simetria da inclusão, $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ e a família $(C_i)_{i \in I}$ forma uma partição de

X . □

A partir das propriedades dos espaços morfológicos podemos deduzir propriedades de topologia digital.

Proposição 7.5 (união de uma família de subconjuntos 4-conexos e 8-conexos) – Seja $(Y_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos 4-conexos (resp. 8-conexos) de E . Se existir um ponto y_0 comum a todos os Y_i , então a união $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ será 4-conexa (resp. 8-conexa). □

Prova – Vamos fazer a prova no caso da conexidade 4. Seja $X = {}_b \epsilon(Y)$ e seja $X_i = {}_b \epsilon(Y_i)$ para todo i em I . Os conjuntos $\mathcal{P}(E)$ e ${}_b \epsilon(\mathcal{P}(E))$ sendo isomorfos, o subconjunto não vazio ${}_b \epsilon(\{y_0\})$ é incluído em todos os X_i que por isto têm um ponto em comum. Como os X_i são subconjuntos conexas do espaço morfológico $(2E, \delta_a(\mathcal{P}(E)))$, pela Proposição 7.2, a união dos X_i é também um subconjunto conexo neste espaço. Mas, pelo isomorfismo esta união é o próprio X , o que prova que Y é um subconjunto 4-conexo de E .

A prova da conexidade 8 é similar a da conexidade 4. □

A Proposição 7.5 dá um sentido à noção de componente 4-conexa e 8-conexa dado um ponto de E .

Definição 7.8 (componente 4-conexa e 8-conexa de um subconjunto dado um ponto) – Seja y um ponto de um subconjunto Y de E . A *componente 4-conexa* (resp. *8-conexa*) C_y de Y dado y é a união de todos os subconjuntos 4-conexos (resp. 8-conexos) de Y que contêm y . □

Pelos mesmos argumentos usados no caso dos espaços morfológicos, a componente 4–conexa (resp. 8–conexa) C_y de um subconjunto Y de E dado um ponto y em Y , é o *maior* subconjunto 4–conexo (resp. 8–conexo) de Y que contém y .

Chamaremos de *componente 4–conexa* (resp. *8–conexa*) *de um subconjunto* Y um subconjunto que se identifica a uma componente 4–conexa (resp. 8–conexa) de Y dado algum ponto de Y .

Pelos mesmos argumentos usados no caso dos espaços morfológicos, as componentes 4–conexas (ou 8–conexas) de um subconjunto Y de E formam uma partição de Y .

A componente conexa de um subconjunto pode ser obtida através do uso repetido da dilatação condicional (ou geodésica) como vamos ilustrar em seguida.

Ao longo deste capítulo, quando fizermos referência à coleção \mathfrak{B}_E , entendemos que \mathfrak{B}_E é a coleção $\mathcal{P}(E)$ no caso invariante por translação, e \mathfrak{B}_E é a coleção $\mathcal{P}(E \oplus E^\dagger)$ no caso condicionalmente invariante em translação (ver Capítulo 4).

Definição 7.9 (dilatação e erosão condicional) – Seja B um elemento de \mathfrak{B}_E e seja X um subconjunto de E . Os operadores $\delta_{B,X}$ e $\epsilon_{B,X}$ sobre $\mathcal{P}(E)$ dados por, para todo Y em $\mathcal{P}(E)$,

$$\delta_{B,X}(Y) = \delta_B(Y) \cap X \quad \text{e} \quad \epsilon_{B,X}(Y) = \epsilon_B(Y) \cup X$$

são chamados, respectivamente, de *dilatação* e *erosão condicional* (ou *geodésica*) *por* B *dado* X . \square

A Figura 7.5 mostra uma dilatação condicional pelo losângulo 3×3 (a cruz) e seu efeito sobre um subconjunto Y reduzido a um único ponto.

Definição 7.10 (n –dilatação condicional e n –erosão condicional) – Seja $n > 0$, seja B um elemento de \mathfrak{B}_E e seja X um subconjunto de E . Os operadores $\delta_{B,X}^n$ e $\epsilon_{B,X}^n$ sobre $\mathcal{P}(E)$ dados por $n - 1$ composições sucessivas

$$\delta_{B,X}^n = (\delta_{B,X})^n \quad \text{e} \quad \epsilon_{B,X}^n = (\epsilon_{B,X})^n$$

são chamados, respectivamente, de n –*dilatação condicional* (ou *geodésica*) e n –*erosão condicional* (ou *geodésica*) *por* B *dado* X . \square

A Figura 7.6 mostra uma 3–dilatação condicional pelo losângulo 3×3 (a cruz) e seu efeito sobre um subconjunto Y , reduzido a um único ponto. A figura mostra um efeito de preechimento controlado pelo subconjunto X .

Definição 7.11 (abertura e fechamento por reconstrução a partir de um marcador) – Seja B um elemento de \mathfrak{B}_E e seja Y um subconjunto de E . Os operadores $\gamma_{B,Y}$ e $\phi_{B,Y}$ sobre $\mathcal{P}(E)$ dados por, para todo X em $\mathcal{P}(E)$,

$$\gamma_{B,Y}(X) = \bigcup_{n=1, \dots} \delta_{B,X}^n(Y) \quad \text{e} \quad \phi_{B,Y}(X) = \bigcap_{n=1, \dots} \epsilon_{B,X}^n(Y)$$

são chamados, respectivamente, de *abertura* e *fechamento por reconstrução* *dado o marcador* Y . \square

A Figura 7.7 mostra, em (a), uma abertura por reconstrução pelo losângulo (a cruz) 3×3 dado um marcador Y reduzido a um único ponto. Observamos o efeito desta abertura sobre um subconjunto X , 4–desconexo. O resultado desta abertura sobre um subconjunto 4–desconexo X é a componente 4–conexa de X que contém o marcador Y . A Figura 7.7 mostra, em (b), uma abertura por reconstrução pelo quadrado 3×3 dado o mesmo marcador Y . O resultado desta abertura sobre o subconjunto 8–conexo X é a componente 8–conexa de X que contém o marcador Y , isto é, aqui o próprio subconjunto X .

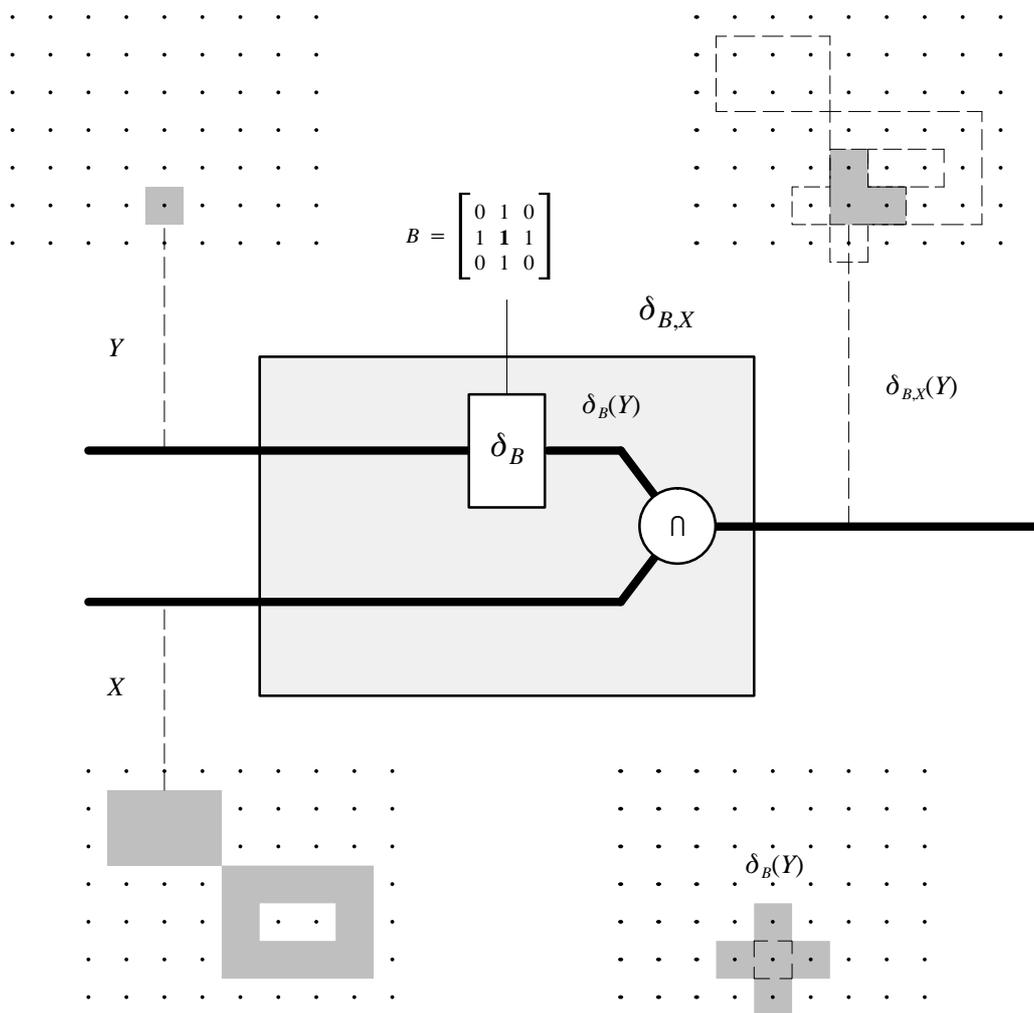


Fig. 7.5 – Dilatação condicional.

De um modo geral, a abertura por reconstrução e o fechamento por reconstrução permitem extrair, respectivamente, os objetos das imagens e os objetos do fundo das imagens que tem interseção não vazia, respectivamente, com o marcador e com o complemento do marcador. A conectividade considerada é definida pelo elemento estruturante B . Quando B é o losângulo 3×3 (a cruz) os objetos extraídos pela abertura e pelo fechamento por reconstrução são 4-conexos. Quando B é o quadrado 3×3 os objetos extraídos pela abertura e pelo fechamento por reconstrução são 8-conexos.

Um ponto importante a ser discutido em topologia digital sobre o retângulo $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$, é a necessidade de se ter dois tipos de conectividade: a conectividade 4 e a 8. Uma análise dos subconjuntos Y e Y^c da Figura 7.8 ilustra esta necessidade. Se usamos o mesmo tipo de conectividade para a análise dos subconjuntos Y e Y^c encontramos uma anomalia.

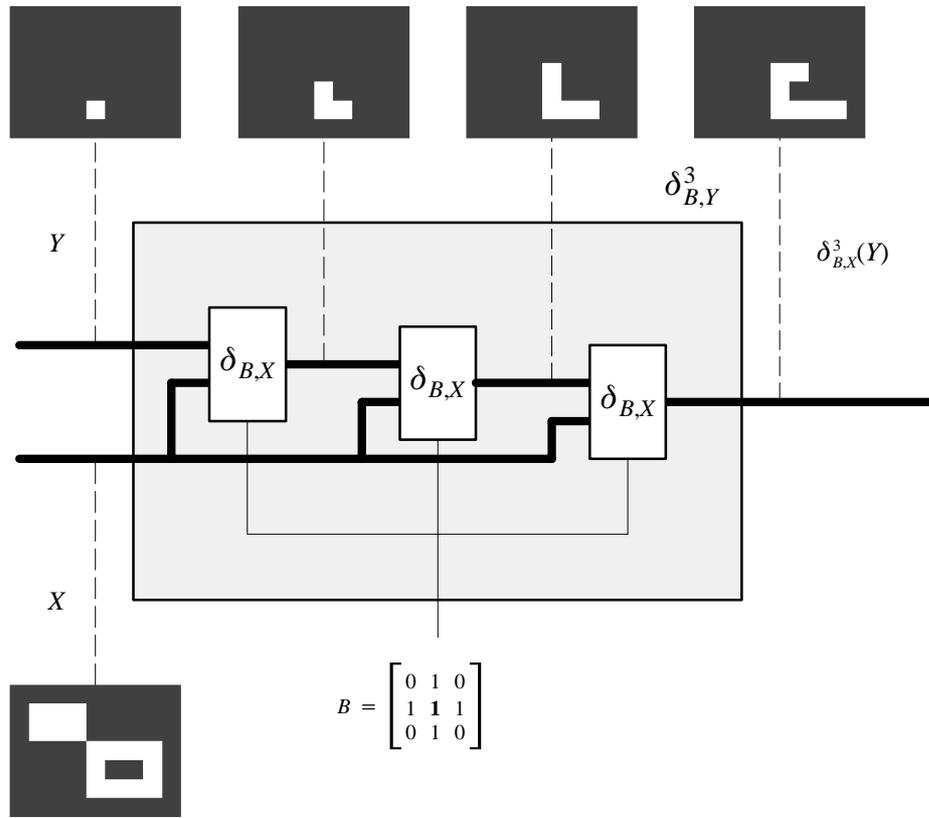


Fig. 7.6 – 3-dilatação condicional.

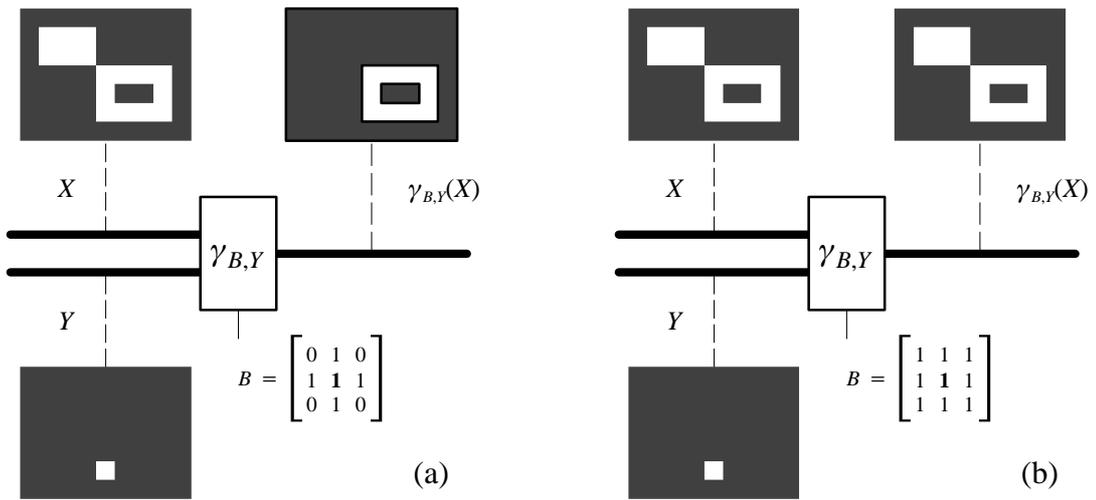


Fig. 7.7 – Aberturas por reconstrução.

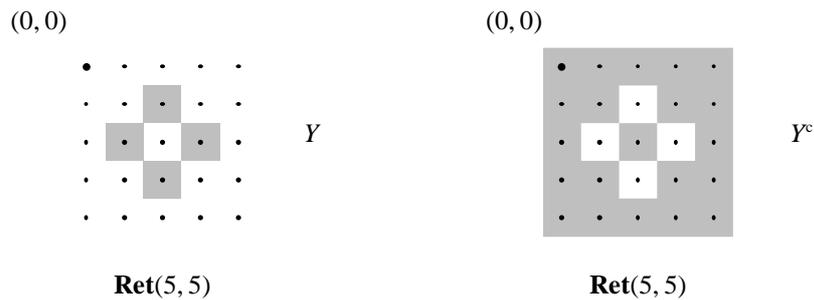


Fig. 7.8 – Um subconjunto e seu complemento.

Se usarmos a conexidade 4, Y e Y^c são dois subconjuntos desconexos (Y tem quatro componentes 4–conexas e Y^c tem duas) o que é anormal, pois, um dos dois deveria ser considerado conexo para justificar a separação do outro em várias componentes conexas. Por exemplo, o subconjunto Y deveria ser considerado conexo para separar Y^c em duas componentes conexas, ou então, deveria ser considerado Y^c conexo para separar Y em quatro componentes conexas.

Se usamos a conexidade 8, Y e Y^c são dois subconjuntos conexos o que é anormal também, pois, no caso da figura, um dos dois deveria ser desconexo para justificar a presença de partes totalmente rodeiadas pelo outro subconjunto.

Este problema tem uma solução se analisamos as imagens binárias usando as duas conexidades: uma para o subconjunto considerado e a outra para seu complemento. Isto é, temos duas maneira de analisar topologicamente uma imagem binária sem encontrar anomalias.

Por exemplo, na Figura 7.8 as quatro componentes 4–conexas de Y são totalmente rodeiadas pelo subconjunto 8–conexo Y^c . Ou ainda, o subconjunto 8–conexo Y separa as duas componentes 4–conexas de Y^c .

7.2 Buraco, borda, árvore de adjacência e homotopia

A partir da definição de subconjunto 4–conexo e 8–conexo, podemos definir as noções de adjacência entre dois pontos e entre dois subconjuntos. Estas definições são equivalentes as dadas em [KonRos89].

Definição 7.12 (adjacência entre dois pontos) – Dois pontos y_1 e y_2 de E são 4–adjacentes (resp. 8–adjacentes) se e somente se o subconjunto $\{y_1, y_2\}$ é 4–conexo (resp. 8–conexo). □

Definição 7.13 (adjacência entre dois subconjuntos) – Dois subconjuntos Y_1 e Y_2 de E são 4–adjacentes (resp. 8–adjacentes) se e somente se existem dois pontos, um ponto y_1 em Y_1 e um ponto y_2 em Y_2 , 4–adjacentes (resp. 8–adjacentes). □

Para definirmos a noção de buraco precisamos introduzir primeiro uma relação de ordem parcial entre subconjuntos conexos. Se A e B são dois subconjuntos de E e A é 4–conexo (resp. 8–conexo), então dizemos que A envolve B se cada ponto de B está contido em uma componente 8–conexa (resp. 4–conexa) finita de $\mathbf{Z}^2 - A$.

A Figura 7.9 mostra uma componente 4-conexa Y que envolve B . Neste exemplo, todos os pontos de B estão contidos numa componente 8-conexa finita de $\mathbf{Z}^2 - Y$, o próprio B .

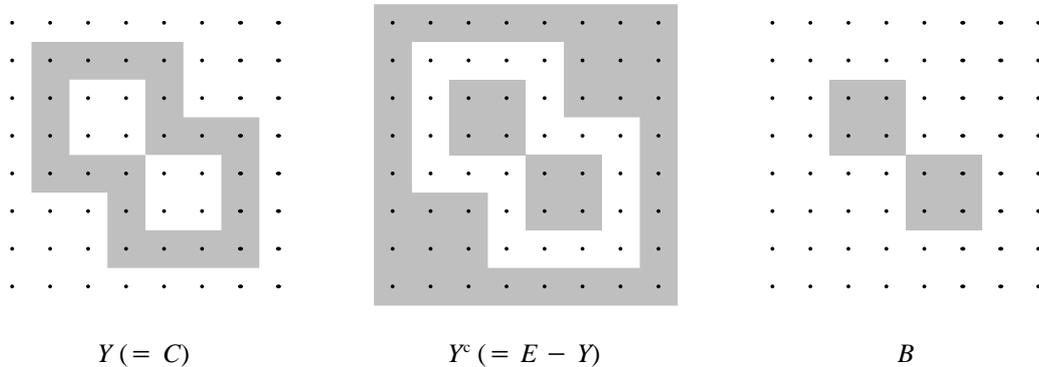


Fig. 7.9 – Um buraco num subconjunto.

Definição 7.14 (buraco) – Seja Y um subconjunto de E . Uma componente 8-conexa (resp. 4-conexa) de Y^c , 8-adjacente (resp. 4-adjacente) à uma componente 4-conexa (resp. 8-conexa) C de Y e envolvida por C , chama-se *buraco 8-conexo* (resp. *4-conexo*) em C . Um *buraco 8-conexo* (resp. *4-conexo*) em Y é um buraco 8-conexo (resp. 4-conexo) numa componente 4-conexa (resp. 8-conexa) de Y . \square

A Figura 7.9 mostra um buraco 8-conexo B num subconjunto Y . Neste exemplo, B é um buraco 8-conexo na componente 4-conexa C de Y (aqui C é o próprio Y). O subconjunto B é uma componente 8-conexa de $Y^c (= E - Y)$, 8-adjacente à C e envolvida por C . Verificamos assim que o subconjunto Y tem *um só* buraco 8-conexo: o subconjunto B . Da mesma maneira, podemos verificar que Y tem *dois* buracos 4-conexos: os dois quadrados 2×2 formando B .

Definição 7.15 (ponto isolado) – Um *ponto* de um subconjunto Y de E é *4-isolado* (resp. *8-isolado*) se e somente se ele não é 4-adjacente (resp. 8-adjacente) a nenhum outro ponto de Y . \square

Os pontos isolados de um subconjunto podem ser obtidos através do uso do chamado operador sup-gerador como vamos ilustrar em seguida.

A partir das quatro classes de operadores elementares da Morfologia Matemática podemos construir mais duas outras classes de grande importância teórica e prática. A primeira é a classe dos operadores sup-geradores e a segunda a dos operadores inf-geradores. Aqui, nós vamos nos restringir aos operadores construídos a partir de operadores elementares invariantes por translação ou condicionalmente invariantes em translação.

Definição 7.16 (anti-dilatação e anti-erosão) – Seja B um elemento de \mathfrak{B}_E . Os operadores δ_B^a e ϵ_B^a sobre $\mathfrak{P}(E)$ dados pelas composições

$$\delta_B^a = \sim \delta_{B^c} \quad \text{e} \quad \epsilon_B^a = \sim \epsilon_B$$

são chamados, respectivamente, de *anti-dilatação* e *anti-erosão pelo elemento estruturante B* . \square

Definição 7.17 (operadores sup-geradores e inf-geradores parametrizados por dois subconjuntos) – Sejam A e B dois elementos de \mathfrak{B}_E tais que $A \subset B$. Os operadores $\lambda_{A,B}$ e $\mu_{A,B}$ sobre $\mathfrak{P}(E)$ dados por, para todo X em $\mathfrak{P}(E)$,

$$\lambda_{A,B} = \epsilon_A \wedge \delta_{B^c} \quad \text{e} \quad \mu_{A,B} = \delta_A \vee \epsilon_{B^c}$$

são chamados, respectivamente, de *operador sup-gerador* e *operador inf-gerador de parâmetros A e B* . \square

O operador sup-gerador de parâmetros A e B^c é equivalente ao chamado *operador “Hit-Miss”* de parâmetros A e B , em outros termos,

$$\text{Hit-Miss}_{A,B} = \lambda_{A,B^c}.$$

Exercício 7.7 (definição equivalente dos operadores sup-geradores e inf-geradores parametrizados por dois subconjuntos) – Mostre que, no caso invariante em translação, o transformado de um subconjunto X de $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ pelo operador sup-gerador de parâmetros A e B é o subconjunto

$$\lambda_{A,B}(X) = \{x \in E : (A + x) \subset X \subset (B + x)\}$$

e o transformado pelo operador inf-gerador de parâmetros A e B é o subconjunto

$$\mu_{A,B}(X) = \{x \in E : (A^t + x) \cap X \neq \emptyset \text{ ou } (B^t + x) \cup X \neq E\}. \quad \square$$

Dados dois subconjuntos A e B de E , tais que $A \subset B$, chamaremos de *padrão* ou, matematicamente, de *intervalo fechado* a coleção de todos os subconjuntos de E que contêm A e estão contidos em B , denotaremos esta coleção $[A, B]$,

$$[A, B] = \{X \in \mathfrak{P}(E) : A \subset X \subset B\}.$$

Observando a expressão de $\lambda_{A,B}(X)$ no enunciado do Exercício 7.7, verificamos que o operador sup-gerador de parâmetros A e B “procura” em X o padrão $[A, B]$. Um ponto x é um ponto de $\lambda_{A,B}(X)$, se e somente se o padrão posicionado em x casa com X (no sentido de contém X). Em outros termos, o operador sup-gerador realiza o casamento (“*template matching*”) entre o padrão e as estruturas geométricas que aparecem na imagem.

Por exemplo, sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbf{Ret}(5, 5)$ dados por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (B^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

Como A e B^c são subconjuntos com poucos pontos e que estes estão agrupados, para simplificar a notação, representamos A e B^c na forma de submatrizes que contêm todos os 1s e o elemento posicionado na origem, e B na forma de submatriz que contêm todos os 0s e o elemento posicionado na origem. Desta forma temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}).$$

Nesta representação é entendido que os elementos não representados valem 0 para A e B^c , e 1 para B . Finalmente, representaremos o padrão $[A, B]$ pela matriz

$$[A, B] = \begin{bmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Nesta representação, os elementos representados pelo símbolo \cdot valem indiferentemente 0 ou 1. É entendido também que os elementos não representados valem indiferentemente 0 ou 1. Este padrão contém, em particular os seguintes subconjuntos,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7.10 mostra o operador sup–gerador de parâmetros A e B como escolhidos acima e seu efeito sobre um subconjunto com duas estruturas em forma de \times e de $+$. O resultado é a eliminação da estrutura em forma de $+$.

A Figura 7.11 mostra a extração de pontos isolados por meio de operadores sup–geradores. Em (a) temos os pontos 4–isolados e (b) os 8–isolados.

Definição 7.18 (borda–4 e borda–8 de um subconjunto) – Seja Y um subconjunto de E . A *borda–4* (resp. *borda–8*) de Y é o conjunto de todos os pontos de Y que são 4–adjacentes (resp. 8–adjacentes) à pelo menos um ponto de Y^c . \square

Definição 7.19 (borda–4 e borda–8 entre duas componentes conexas) – Seja Y um subconjunto de E . A *borda–4* (resp. *borda–8*) de uma componente 8–conexa (resp. 4–conexa) C de Y , relativamente a uma componente 4–conexa (resp. 8–conexa) C' de Y^c é o conjunto dos pontos em C que são 4–adjacentes (resp. 8–adjacentes) de um ponto em C' . \square

Proposição 7.6 (conexidade das bordas) – Seja Y um subconjunto de E . A *borda–4* (resp. *borda–8*) de uma componente 8–conexa (resp. 4–conexa) C de Y , relativamente a uma componente 4–conexa (resp. 8–conexa) C' de Y^c é 8–conexa (resp. 4–conexa). \square

Prova – Ver [Rosenf79, Capítulo 2]. \square

As bordas de um subconjunto podem ser obtidas através do uso do chamado extrator de bordas como vamos o ilustrar em seguida.

Definição 7.20 (extrator de bordas) – Sejam A e B dois elementos de \mathfrak{B}_B . O operadores $\psi_{A,B}$ sobre $\mathcal{P}(E)$ dados pela composição

$$\psi_{A,B} = \delta_A \sim \epsilon_B,$$

é chamado de *extrator de bordas de parâmetros A e B* . \square

Se A é o singleton que contém a origem e B é o quadrado ou o losângulo (a cruz) 3×3 , então $\psi_{A,B}$ extrai as bordas relativas às componentes, respectivamente, 4–conexas e 8–conexas de um subconjunto. As Figuras 7.12 e 7.13 ilustram a extração da borda relativamente à uma componente, respectivamente, 4–conexa e 8–conexa.

Uma *curva fechada simples* é um subconjunto 4–conexo (resp. 8–conexo) cujos pontos são 4–adjacentes (resp. 8–adjacentes) a dois, e somente dois, outros pontos do subconjunto.

Uma *curva aberta simples* é um subconjunto 4–conexo (resp. 8–conexo) cujos pontos são 4–adjacentes (resp. 8–adjacentes) a dois, e somente dois, outros pontos do subconjunto, com exceção de dois pontos que são 4–adjacentes (resp. 8–adjacentes) a um só outro ponto do subconjunto.

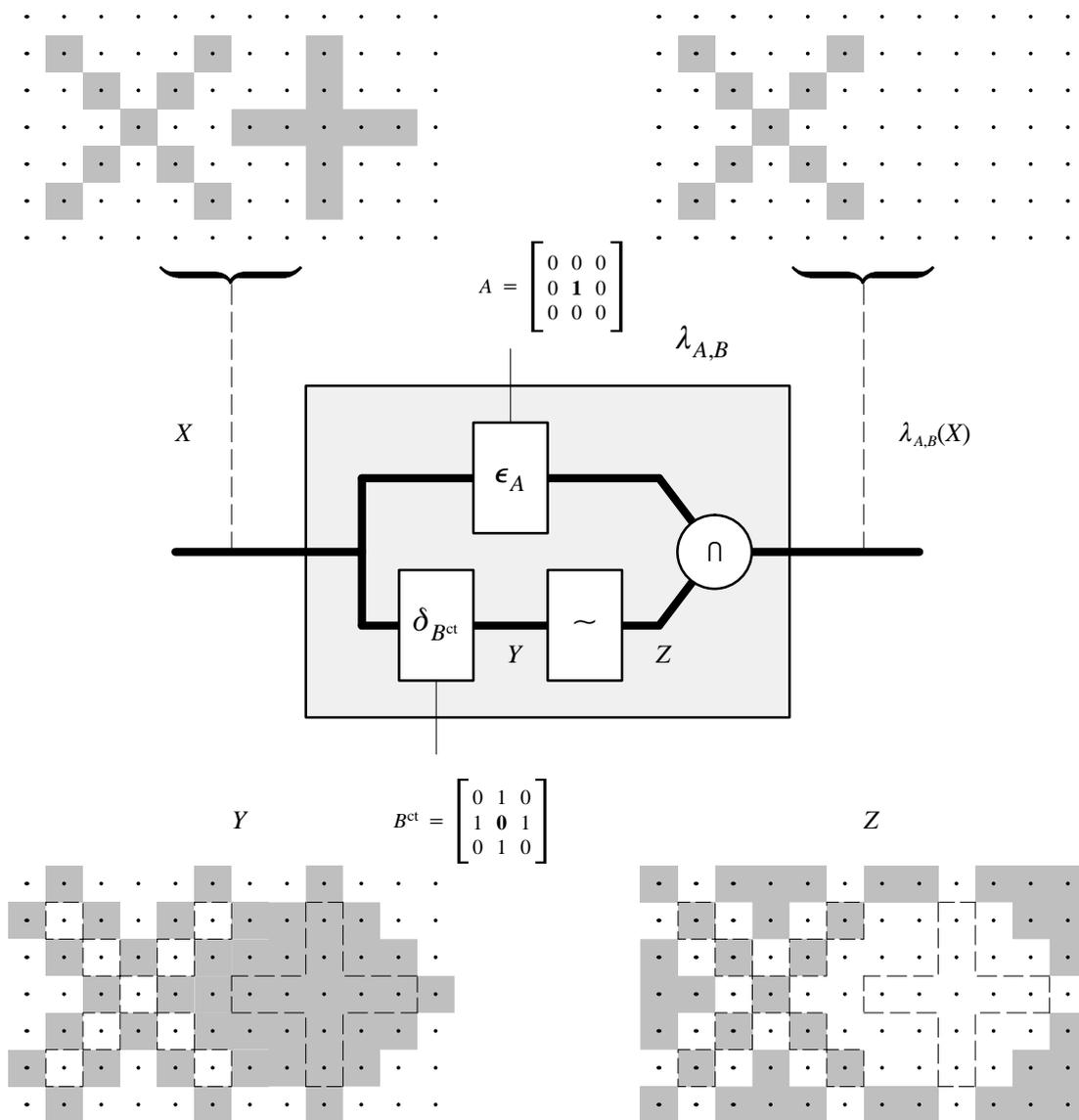


Fig. 7.10 – Operador sup-gerador.

Em 1969, Buneman introduziu a noção de árvore de adjacência para imagens binárias [KonRos89].

Definição 7.21 (árvore de adjacência de um subconjunto) – A *árvore de adjacência 4* (resp. *8*) de um subconjunto Y de E é o grafo cujos vértices são as componentes 8-conexas (resp. 4-conexas) de Y e as componentes 4-conexas (resp. 8-conexas) de Y^c , e cujas arestas são os pares formados por duas componentes conexas *4-adjacentes* (resp. *8-adjacentes*), uma sendo de Y e a outra de Y^c . \square

Em [Rosenf74] temos uma prova que o grafo mencionado na Definição 7.21 é mesmo uma árvore.

A Figura 7.14 mostra as árvores de adjacência 4 e 8, respectivamente em (b) e (c), do subconjunto Y mostrado em (a). Os vértices da árvore são coloridos de cinza para as componentes de Y e de branco para as componentes de Y^c . Considerando a adjacência 8, o conjunto Y apresenta um *buraco*

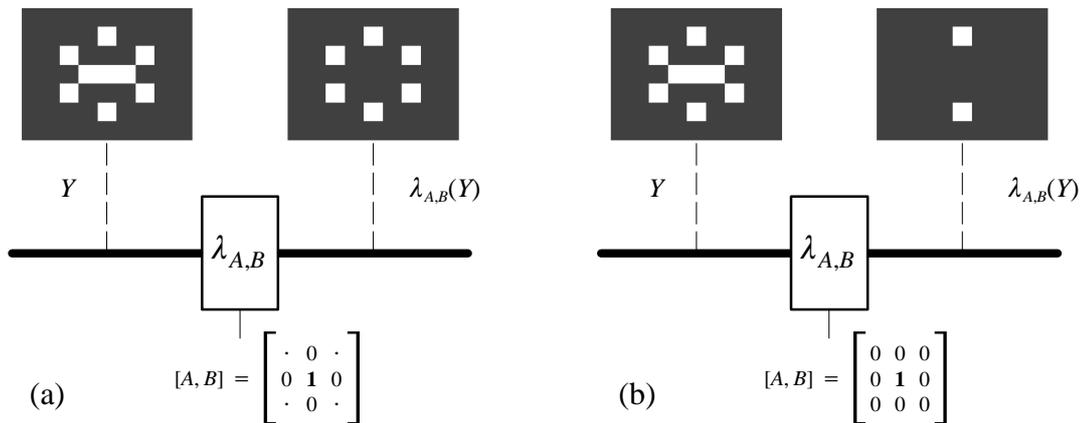


Fig. 7.11 – Extração dos pontos isolados.

Dois subconjuntos com a mesma árvore de adjacência 4 (resp. 8) são chamados de *4-homotópicos* (resp. *8-homotópicos*). Um operador ψ sobre $\mathcal{P}(E)$ é *4-homotópico* (resp. *8-homotópico*) se e somente se, para todo X em $\mathcal{P}(E)$, X e $\psi(X)$ são 4-homotópicos (resp. 8-homotópicos). Diz-se de um operador homotópico que ele conserva a *homotopia*.

No estudo dos operadores homotópicos de afinamento e espessamento (ver Capítulo 9) a noção de pontos simples é muito importante.

Definição 7.22 (pontos 4-simples e 8-simples) – Um ponto y de um subconjunto Y de E é um *ponto 4-simples* (resp. *8-simples*) se e somente se $Y - \{y\}$ tem o mesmo árvore de adjacência 4 (resp. 8) que Y . \square

Os candidatos em Y a ser pontos 4-simples (resp. 8-simples) são os pontos não 4-isolados (resp. 8-isolados) que pertencem a borda-4 (resp. borda-8) de Y .

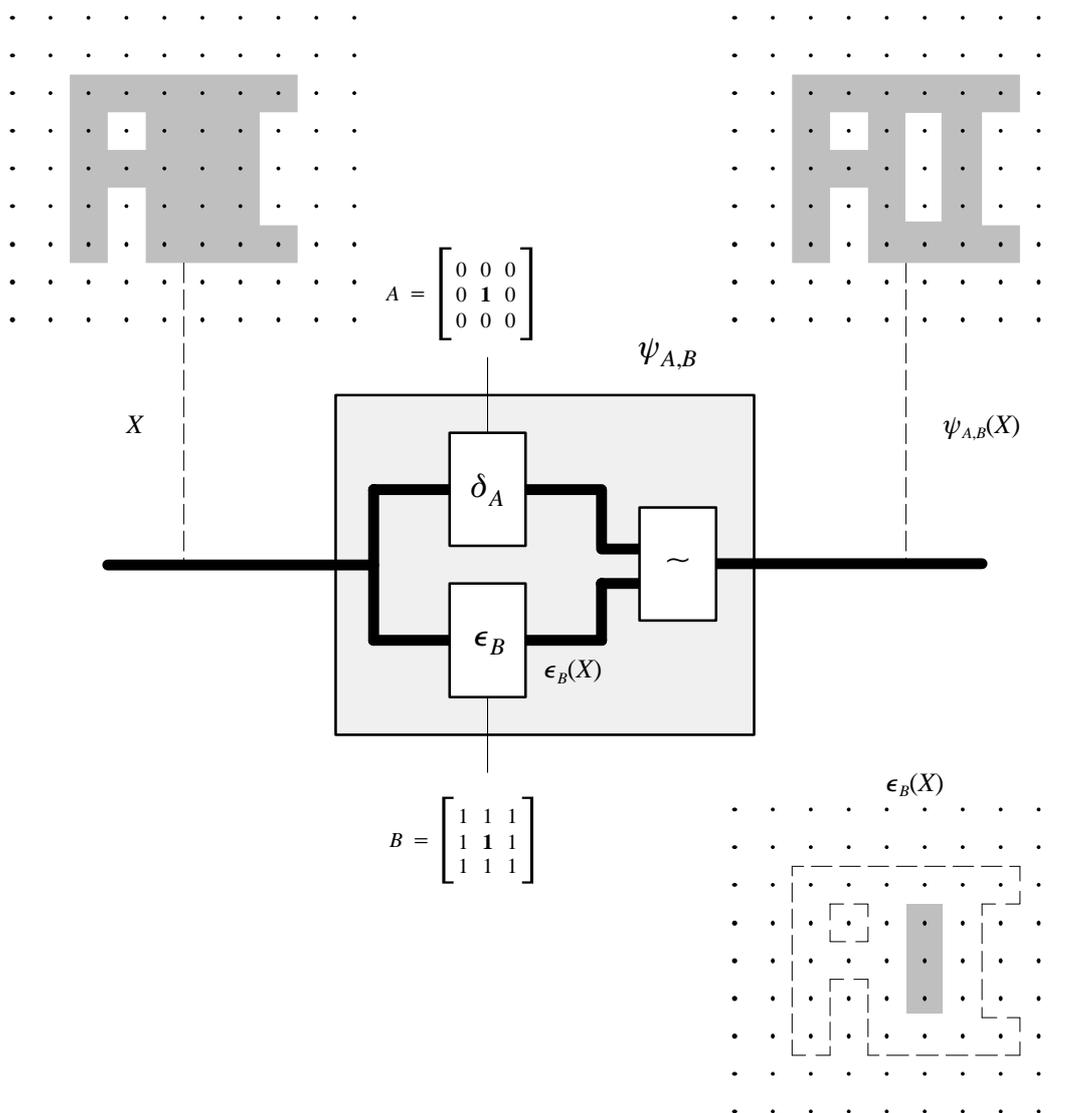


Fig. 7.12 – Borda relativa às componentes 4-conexas.

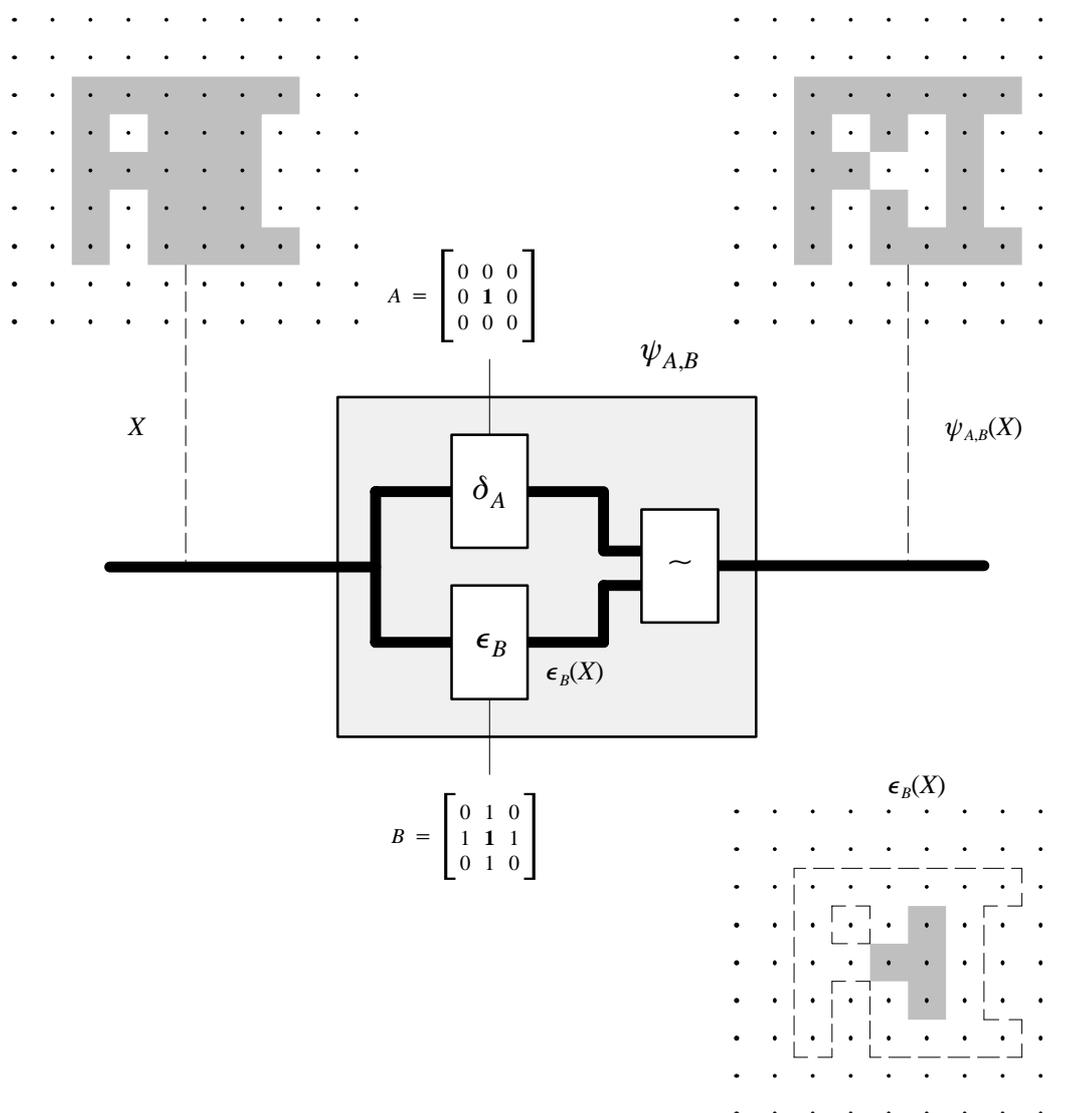


Fig. 7.13 – Borda relativa às componentes 8–conexas.

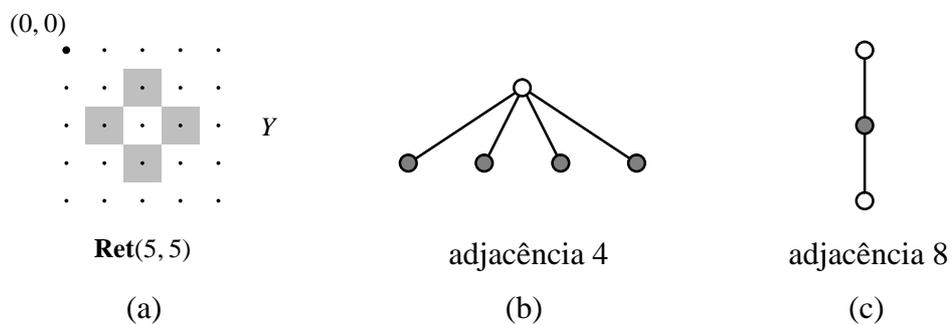


Fig. 7.14 – Árvores de adjacência.