Capítulo 5

Dualidades entre dilatações e erosões

Neste capítulo voltamos a considerar os operadores elementares do Capítulo 3 em toda sua generalidade, isto é, os operadores não serão necessariamente invariantes ou parcialmente invariantes por translação.

Dentro desse contexto definimos a dualidade entre dilatações e erosões, como uma correspondência um para um entre o conjunto das dilatações e o das erosões. Exemplificamos este conceito, apresentando duas das mais importantes dualidades conhecidas: aquela baseada na estrutura de reticulado completo e aquela baseada na estrutura de reticulado completo Booleano. Verificamos que a primeira é mais fundamental, porque é baseada na noção de conexão de Galois que é definida para qualquer reticulado completo.

O estabelecimento de uma dualidade, através das conexões de Galois, entre o reticulado das dilatações e o das erosões vai ser usada para deduzir uma caracterização das erosões a partir da caracterização das dilatações, apresentada no Capítulo 3. Esta dualidade vai ser importante também para deduzir propriedades dos operadores de abertura e fechamento morfológico no próximo capítulo.

5.1 Conexão de Galois

As definições de dilatações e de erosões são *duais*, no sentido que, se trocarmos a relação "está contido" ($\subset$) pela relação "contem" ($\supset$), os operadores que eram dilatações passam a ser erosões e os operadores que eram erosões passam a ser dilatações. Vamos mostrar que existe uma relação um por um entre as dilatações e as erosões. É isto que nós vamos estudar nesta seção. A noção chave para levar adiante este propósito é a de *conexão de Galois* [Birkho67].

Definição 5.1 (conexão de Galois) – Sejam α e β dois operadores sobre $\mathcal{P}$. O par (α,β) é uma *conexão de Galois* entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$ se e somente se os três axiomas abaixo são satisfeitos,

$$X_1 \supset X_2 \Rightarrow \alpha(X_2) \subset \alpha(X_1) \quad (X_1, X_2 \in \mathcal{P}) \qquad \text{(isotonia de } \alpha)$$

$$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow \beta(Y_2) \supset \beta(Y_1) \quad (Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}) \qquad \text{(isotonia de } \beta)$$

$$X \supset \beta\alpha(X) \quad \text{e} \quad Y \subset \alpha\beta(Y) \quad (X, Y \in \mathcal{P}).$$

(anti–extensividade de $\beta\alpha$ e extensividade de $\alpha\beta$)

□

Proposição 5.1 (definição equivalente de conexão de Galois) – Sejam α e β dois operadores sobre $\mathcal{P}$. O par (α,β) é uma *conexão de Galois* entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$ se e somente se

$$X \supset \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}). \qquad \square$$

Prova – Por um lado, supondo que (α,β) é uma conexão de Galois, para todo X e Y em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X \supset \beta(Y) &\Rightarrow \alpha(X) \supset \alpha(\beta(Y)) && \text{(isotonia de } \alpha\text{)}\\
&\Leftrightarrow \alpha(X) \supset \alpha\beta(Y) && \text{(definição do composto)}\\
&\Leftrightarrow \alpha\beta(Y) \subset \alpha(X) && \text{(dualidade entre } \subset \text{ e } \supset\text{)}\\
&\Rightarrow Y \subset \alpha(X), && \text{(extensividade de } \alpha\beta \text{ e transitividade de } \subset\text{)}
\end{aligned}$$

da mesma maneira,

$$\begin{aligned}
Y \subset \alpha(X) &\Rightarrow \beta(Y) \subset \beta(\alpha(X)) && \text{(isotonia de } \beta\text{)}\\
&\Leftrightarrow \beta(Y) \subset \beta\alpha(X) && \text{(definição do composto)}\\
&\Leftrightarrow \beta\alpha(X) \supset \beta(Y) && \text{(dualidade entre } \subset \text{ e } \supset\text{)}\\
&\Rightarrow X \supset \beta(Y). && \text{(anti–extensividade de } \beta\alpha \text{ e transitividade de } \supset\text{)}
\end{aligned}$$

Em outros termos, se (α,β) é uma conexão de Galois, então

$$X \supset \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}).$$

Por outro lado, supondo que (α,β) verifica a equivalência

$$X \supset \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}),$$

para todo X em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
Y = \alpha(X) &\Rightarrow X \supset \beta(\alpha(X)) && \text{(implicação } \Leftarrow\text{)}\\
&\Leftrightarrow X \supset \beta\alpha(X), && \text{(definição de composto)}
\end{aligned}$$

isto é, $\beta\alpha$ é anti–extensiva. Da mesma maneira, para todo Y em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X = \beta(Y) &\Rightarrow Y \subset \alpha(\beta(Y)) && \text{(implicação } \Rightarrow\text{)}\\
&\Leftrightarrow Y \subset \alpha\beta(Y), && \text{(definição de composto)}
\end{aligned}$$

isto é, $\alpha\beta$ é extensiva. Finalmente, para todo X_1 e X_2 em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X_1 \supset X_2 &\Rightarrow X_1 \supset \beta\alpha(X_2) && \text{(anti–extensividade de } \beta\alpha \text{ e transitividade de } \supset\text{)}\\
&\Leftrightarrow X_1 \supset \beta(\alpha(X_2)) && \text{(definição de composto)}\\
&\Rightarrow \alpha(X_2) \subset \alpha(X_1), && (Y = \alpha(X_2) \text{ e implicação } \Rightarrow)
\end{aligned}$$

isto é, α é isotônica. Da mesma maneira, para todo Y_1 e Y_2 em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
Y_1 \subset Y_2 &\Rightarrow Y_1 \subset \alpha\beta(Y_2) && \text{(extensividade de } \beta\alpha \text{ e transitividade de } \subset\text{)}\\
&\Leftrightarrow Y_1 \subset \alpha(\beta(Y_2)) && \text{(definição de composto)}\\
&\Rightarrow \beta(Y_2) \supset \beta(Y_1), && (X = \beta(Y_2) \text{ e implicação } \Leftarrow)
\end{aligned}$$

isto é, β é isotônica. Em outros termos, se (α,β) verifica a equivalência

$$X \supset \beta(Y) \Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}),$$

então (α,β) é uma conexão de Galois. $\square$

A Figura 5.1 ilustra uma conexão de Galois (α,β). Um caso particular de conexão de Galois é quando

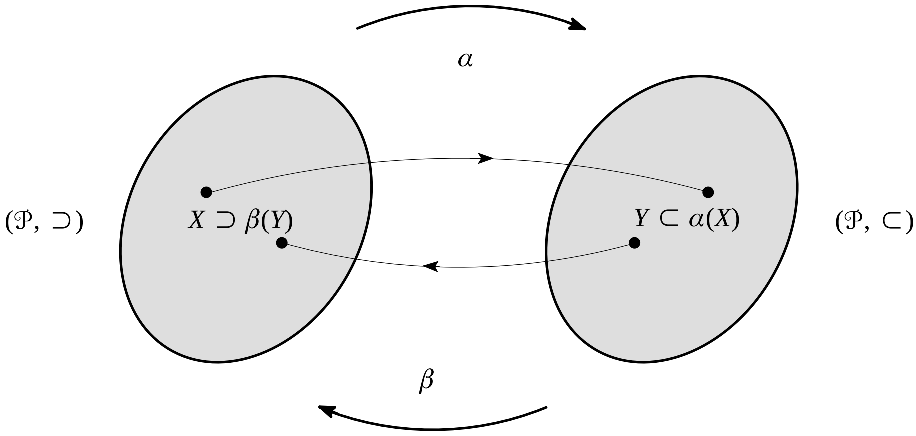

Fig. 5.1 – Conexão de Galois.

o par (α,β) verifica a equivalência abaixo,

$$X = \beta(Y) \Leftrightarrow Y = \alpha(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}),$$

ou ainda, de uma maneira equivalente, $\alpha\beta = \iota$ e $\beta\alpha = \iota$ (isto é, α e β são bijeções recíprocas).

Exercício 5.1 (exemplos de conexão de Galois) – Seja E é um grupo Abeliano. Mostre que os pares (τ_u, τ_{-u}), para todo u em E, e o par (τ, τ) são conexões de Galois entre $(\mathcal{P}(E), \supset)$ e $(\mathcal{P}(E), \subset)$. □

Vamos caracterizar mutuamente os elementos de uma conexão de Galois. Daqui para frente, os limitantes superiores, inferiores, os supremos e os ínfimos serão sempre relativos ao conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Para todos operadores α e β sobre $\mathcal{P}$, sejam $\underline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ os operadores sobre $\mathcal{P}$ dados por

$$\overline{\beta}(X) = \sup\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \beta(Y)\} \quad (X \in \mathcal{P})$$

$$\underline{\alpha}(Y) = \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \alpha(X)\} \quad (Y \in \mathcal{P}).$$

Proposição 5.2 (caracterização mútua dos elementos de uma conexão de Galois) – Sejam α e β dois operadores sobre $\mathcal{P}$. Se o par (α,β) é uma *conexão de Galois* entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$, então

$$\alpha = \overline{\beta} \quad \text{e} \quad \beta = \underline{\alpha}.$$ □

Prova – Pela Proposição 5.1, para todo X em $\mathcal{P}$,

$$\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \beta(Y)\} = \{Y \in \mathcal{P} : Y \subset \alpha(X)\},$$

isto é, $\alpha(X)$ é o maior elemento de $\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \beta(Y)\}$, em outros termos, $\alpha(X)$ é o supremo desta coleção. Assim, por definição de $\overline{\beta}$, para todo X em $\mathcal{P}$,

$$\alpha(X) = \overline{\beta}(X).$$

A prova da segunda igualdade decorre da primeira igualdade por dualidade. □

A conexão de Galois é importante em Morfologia Matemática por causa da próxima proposição.

Proposição 5.3 (propriedade de uma conexão de Galois) – Sejam α e β dois operadores sobre $\mathcal{P}$. Se o par (α,β) é uma *conexão de Galois* entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$ então

$$\beta \in \Delta \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathrm{E}.$$ □

Prova – De um lado, para todo $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$ ($\mathcal{Y} \neq \emptyset$) e $X \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X \supset \sup\beta(\mathcal{Y}) &\Leftrightarrow \sup\beta(\mathcal{Y}) \subset X && \text{(dualidade entre } \subset \text{ e } \supset)\\
&\Leftrightarrow X \text{ é l.s. de } \beta(\mathcal{Y}) && \text{(definição de supremo)}\\
&\Leftrightarrow \beta(Y) \subset X \; (Y \in \mathcal{Y}) && \text{(definição de l.s.)}\\
&\Leftrightarrow X \supset \beta(Y) \; (Y \in \mathcal{Y}) && \text{(dualidade entre } \subset \text{ e } \supset)\\
&\Leftrightarrow Y \subset \alpha(X) \; (Y \in \mathcal{Y}) && \text{(Proposição 5.1)}\\
&\Leftrightarrow \alpha(X) \text{ é l.s. de } \mathcal{Y} && \text{(definição de l.s.)}\\
&\Leftrightarrow \sup\mathcal{Y} \subset \alpha(X) && \text{(definição de supremo)}\\
&\Leftrightarrow X \supset \beta(\sup\mathcal{Y}), && \text{(Proposição 5.1)}
\end{aligned}$$

isto é, $X \supset \sup\beta(\mathcal{Y}) \Leftrightarrow X \supset \beta(\sup\mathcal{Y})$. Fazendo, sucessivamente, $X = \beta(\sup\mathcal{Y})$ e $X = \sup\beta(\mathcal{Y})$, obtemos, por anti–simetria da relação $\supset$, para todo $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$ ($\mathcal{Y} \neq \emptyset$),

$$\beta(\sup\mathcal{Y}) = \sup\beta(\mathcal{Y}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\emptyset \subset \alpha(\emptyset) &\Leftrightarrow \emptyset \supset \beta(\emptyset) && \text{(Proposição 5.1)}\\
&\Rightarrow \beta(\emptyset) = \emptyset. && (\emptyset \text{ é o menor elemento de } \mathcal{P})
\end{aligned}$$

Isto é, desde que ($\emptyset \subset \alpha(\emptyset)$) é sempre verdade, $\beta(\emptyset) = \emptyset$. Assim, $\beta(\sup\mathcal{Y}) = \sup\beta(\mathcal{Y})$ mesmo para $\mathcal{Y} = \emptyset$.

Em outros termos, $\beta \in \Delta$. A prova que $\alpha \in \mathrm{E}$ decorre de $\beta \in \Delta$ por dualidade. □

Com os resultados acima, relativos à conexão de Galois, podemos enunciar a seguinte proposição, própria as conexões de Galois entre reticulados completos.

Proposição 5.4 (definições equivalentes de uma conexão de Galois) – Sejam α e β dois operadores sobre $\mathcal{P}$. As três proposições abaixo são equivalentes:

(1) (α,β) é uma conexão de Galois entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$;

(2) $\alpha \in \mathrm{E}$ e $\beta = \underline{\alpha}$;

(3) $\beta \in \Delta$ e $\alpha = \overline{\beta}$. □

Prova – Vamos provar que (1) implica (2). Pela Proposição 5.3, $\alpha \in \mathrm{E}$ e pela Proposição 5.2, $\beta = \underline{\alpha}$.

Vamos provar que (2) implica (1). Pela Proposição 3.1, α é isotônico. Seja $Y \in \mathcal{P}$, e seja $\mathcal{X}_Y = \{U \in \mathcal{P} : Y \subset \alpha(U)\}$, então

$$\begin{aligned}
Y_1 \subset Y_2 &\Rightarrow (Y_2 \subset \alpha(U) \Rightarrow Y_1 \subset \alpha(U) \;\; (U \in \mathcal{P})) && \text{(transitividade de } \subset)\\
&\Leftrightarrow \mathcal{X}_{Y_2} \subset \mathcal{X}_{Y_1} && \text{(definição de } \mathcal{X}_Y)\\
&\Rightarrow \inf\mathcal{X}_{Y_1} \subset \inf\mathcal{X}_{Y_2} && \text{(propriedade do ínfimo)}\\
&\Leftrightarrow \underline{\alpha}(Y_1) \subset \underline{\alpha}(Y_2), && \text{(definições de } \underline{\alpha} \text{ e } \mathcal{X}_Y)\\
&\Leftrightarrow \beta(Y_1) \subset \beta(Y_2), && (\beta = \underline{\alpha})
\end{aligned}$$

isto é, β é também isotônica.

Para todo $X \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
X \in \mathcal{X}_{\alpha(X)} &\Rightarrow X \supset \inf \mathcal{X}_{\alpha(X)} && \text{(ínfimo é l.i.)}\\
&\Leftrightarrow X \supset \underline{\alpha}(\alpha(X)) && \text{(definições de } \underline{\alpha} \text{ e } \mathcal{X}_Y)\\
&\Leftrightarrow X \supset \beta(\alpha(X)) && (\beta = \underline{\alpha})\\
&\Leftrightarrow X \supset \beta\alpha(X), && \text{(definição de composto)}
\end{aligned}
$$

isto é, desde que ($X \in \mathcal{X}_{\alpha(X)}$) é sempre verdade, $\beta\alpha$ é anti–extensivo.

Para todo $Y \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathcal{X}_Y) &= \{V \in \mathcal{P} : \exists X \in \mathcal{X}_Y,\ V = \alpha(X)\} && \text{(definição de imagem)}\\
&= \{V \in \mathcal{P} : \exists X \in \mathcal{P},\ Y \subset \alpha(X) \text{ e } V = \alpha(X)\} && \text{(definição de } \mathcal{X}_Y)\\
&\subset \{V \in \mathcal{P} : Y \subset V\}, && \text{(dedução lógica)}
\end{aligned}
$$

em outros termos, Y é l.i. de $\alpha(\mathcal{X}_Y)$. Para todo $Y \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
Y \text{ é l.i. de } \alpha(\mathcal{X}_Y) &\Leftrightarrow Y \subset \inf \alpha(\mathcal{X}_Y) && \text{(definição de ínfimo)}\\
&\Leftrightarrow Y \subset \alpha(\inf \mathcal{X}_Y) && (\alpha \text{ é erosão})\\
&\Leftrightarrow Y \subset \alpha(\underline{\alpha}(Y)) && \text{(definições de } \underline{\alpha} \text{ e } \mathcal{X}_Y)\\
&\Leftrightarrow Y \subset \alpha(\beta(Y)) && (\beta = \underline{\alpha})\\
&\Leftrightarrow Y \subset \alpha\beta(Y), && \text{(definição de composto)}
\end{aligned}
$$

isto é, desde que (Y é l.i. de $\alpha(\mathcal{X}_Y)$) é sempre verdade, $\alpha\beta$ é extensivo.

Em outros termos, pela Definição 5.1 (α,β) é uma conexão de Galois.

A prova que (1) e (3) são equivalentes decorre da equivalência entre (1) e (2) por dualidade. □

A partir da proposição acima, podemos enunciar o seguinte resultado que relaciona dilatações e erosões.

Proposição 5.5 (dual isomorfismo entre as dilatações e as erosões) – O mapeamento do reticulado completo E das erosões sobre $\mathcal{P}$, no reticulado completo Δ das dilatações sobre $\mathcal{P}$,

$$\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$$

é um dual isomorfismo. Isto é, $\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$ é uma bijeção e para todo ϵ_1 e ϵ_2 em E,

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \Leftrightarrow \underline{\epsilon_2} \leq \underline{\epsilon_1}. \qquad \text{(antitonia dupla)}$$

O inverso de $\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$ é o mapeamento

$$\delta \mapsto \overline{\delta}.$$

O gráfico de $\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$ é o conjunto de todas as conexões de Galois entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$.

□

Prova – A equivalência entre (1) e (2) da Proposição 5.4 mostra que o gráfico de $\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$ é o conjunto de todas as conexões de Galois entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$. A equivalência entre (2) e (3) mostra que o mapeamento $\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$ é uma bijeção e seu inverso é $\delta \mapsto \overline{\delta}$, desde que $\epsilon = \overline{(\underline{\epsilon})}$ e $\delta = \underline{(\overline{\delta})}$.

Vamos provar a antitonia dupla de $\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$. Para todo ϵ_1 e ϵ_2 em E,

$$
\begin{aligned}
\epsilon_1 \leq \epsilon_2 &\Leftrightarrow \epsilon_1(X) \subset \epsilon_2(X)\ (X \in \mathcal{P}) && \text{(definição de } \leq) \\
&\Leftrightarrow (Y \subset \epsilon_1(X) \Rightarrow Y \subset \epsilon_2(X)\ (X, Y \in \mathcal{P}) && \text{(transitividade de } \subset) \\
&\Leftrightarrow X \supset \underline{\epsilon_1}(Y) \Rightarrow X \supset \underline{\epsilon_2}(Y)\ (X, Y \in \mathcal{P}) && \text{(Proposições 5.1 e 5.4)} \\
&\Leftrightarrow \underline{\epsilon_1}(Y) \supset \underline{\epsilon_2}(Y)\ (Y \in \mathcal{P}) && \text{(transitividade de } \supset) \\
&\Leftrightarrow \underline{\epsilon_2}(Y) \subset \underline{\epsilon_1}(Y)\ (Y \in \mathcal{P}) && \text{(dualidade de } \subset \text{ e } \supset) \\
&\Leftrightarrow \underline{\epsilon_2} \leq \underline{\epsilon_1}. && \text{(definição de } \leq)
\end{aligned}
$$

□

A Proposição 5.5 mostra que existe uma correspondência um por um entre Δ e E. A Figura 5.2 ilustra este resultado.

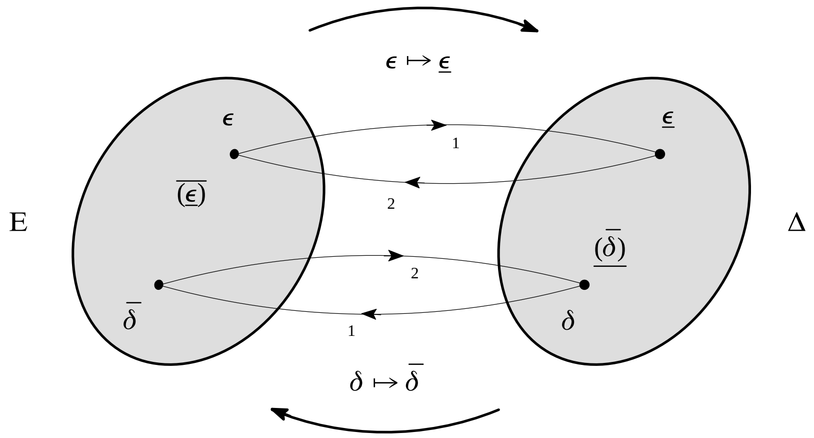

Fig. 5.2 – Bijeção entre as erosões e as dilatações.

A bijeção entre as dilatações e as erosões permite caracterizar as erosões simplesmente a partir da caracterização das dilatações, feita no Capítulo 3.

Proposição 5.6 (caracterização das erosões) – O mapeamento de E em $\mathcal{P}^E$,

$$\epsilon \mapsto a_\epsilon\,,$$

onde a_ϵ é a função dada por

$$a_\epsilon(y) = \inf\{X \in \mathcal{P} : y \in \epsilon(X)\} \quad (y \in E)$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$a \mapsto \epsilon_a\,,$$

onde ϵ_a é a erosão dada por

$$\epsilon_a(X) = \{y \in E : X \supset a(y)\} \quad (X \in \mathcal{P}).$$

Para todo $\epsilon \in \mathrm{E}$, $a_\epsilon = a_{\underline{\epsilon}}$ e para todo $a \in \mathcal{P}^E$, $\epsilon_a = \overline{\delta_a}$. □

Prova – Vamos provar que o mapeamento $\epsilon \mapsto a_\epsilon$ é a composição da bijeção $\delta \mapsto a_\delta$ (Proposição 3.5) pela bijeção $\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$ (Proposição 5.5). Para todo $\epsilon \in \mathrm{E}$ e $y \in E$,

$$
\begin{aligned}
a_{\underline{\epsilon}}(y) &= \underline{\epsilon}(\{y\}) && \text{(definição } a_\delta) \\
&= \inf\{X \in \mathcal{P} : \{y\} \subset \epsilon(X)\} && \text{(definição } \underline{\epsilon})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\{X \in \mathcal{P} :\ y \in \epsilon(X)\} && \text{(definição de singleton)}\\
&= a_\epsilon(y). && \text{(definição de } a_\epsilon\text{)}
\end{aligned}
$$

Isto é, para todo $\epsilon \in \mathrm{E}$, $a_\epsilon = a_{\underline{\epsilon}}$. Por ser a composição de duas bijeção, $\epsilon \mapsto a_\epsilon$ é uma bijeção.

Vamos provar que o mapeamento $a \mapsto \epsilon_a$ é a composição de $\delta \mapsto \overline{\delta}$ (Proposição 5.5) por $a \mapsto \delta_a$ (Proposição 3.5). Para todo $a \in \mathcal{P}^E$ e $X \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
\overline{\delta_a}(X) &= \sup\{Y \in \mathcal{P} :\ X \supset \delta_a(Y)\} && \text{(definição de } \overline{\delta}\text{)}\\
&= \sup\{Y \in \mathcal{P} :\ X \supset \bigcup_{y \in Y} a(y)\} && \text{(definição de } \delta_a\text{)}\\
&= \bigcup_{X \supset \bigcup_{y \in Y} a(y)} Y && \text{(propriedade da união)}\\
&= \{y \in E :\ \exists Y \in \mathcal{P},\ (X \supset \bigcup_{y' \in Y} a(y')) \text{ e } y \in Y\} && \text{(definição da união)}\\
&= \{y \in E :\ \exists Y \in \mathcal{P},\ (X \supset a(y')\ (y' \in Y)) \text{ e } y \in Y\} && \text{(propriedade da união)}\\
&= \{y \in E :\ X \supset a(y)\} && \text{(dedução lógica))}\\
&= \epsilon_a(X). && \text{(definição de } \epsilon_a\text{)}
\end{aligned}
$$

Isto é, para todo $a \in \mathcal{P}^E$, $\epsilon_a = \overline{\delta_a}$. Por ser a composição do inverso de $\epsilon \mapsto \underline{\epsilon}$ pelo inverso de $\delta \mapsto a_\delta$, $a \mapsto \epsilon_a$ é o inverso de $\epsilon \mapsto a_\epsilon$. $\square$

A Proposição 5.6 mostra que existe uma correspondência um por um entre E e $\mathcal{P}^E$. As funções a valores nas partes de E caracterizam sem ambigüidade as erosões. A Figura 5.3 ilustra este resultado e mostra como ele é obtido. A função a_ϵ é chamada de *função estruturante da erosão* ε.

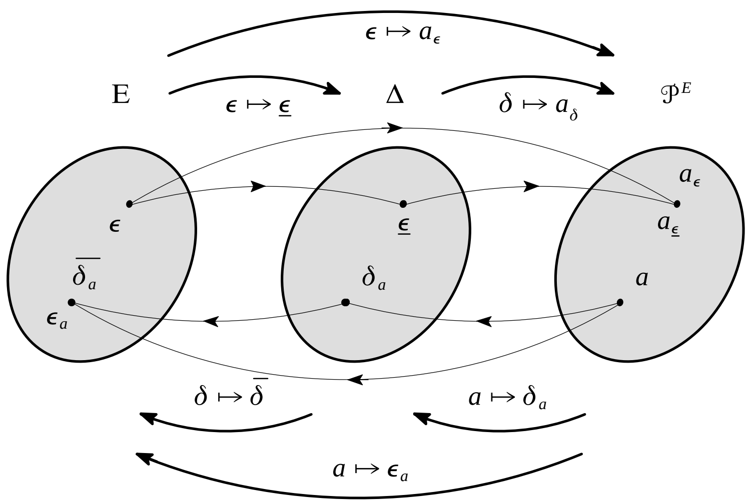

Fig. 5.3 – Bijeção entre as erosões e as funções estruturantes.

A Figura 5.4 mostra quatro modos de representar uma erosão por um bloquinho. Em (a) e (d), fazemos uma referência explícita a erosão. Em (b) e (c), a erosão é caracterizada pela sua função estruturante. Como já indicado no Capítulo 3, para um dado subconjunto X, o subconjunto $\epsilon_a(X)$ chama–se *erosão de X pela função estruturante a*.

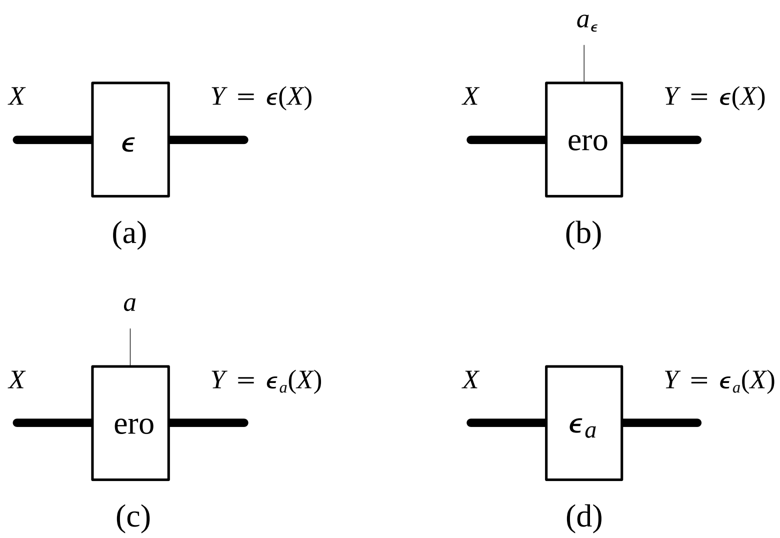

Fig. 5.4 – Quatro modos de representar uma erosão.

A bijeção apresentada na Proposição 5.6 inverte as relações de ordem definidas sobre E e $\mathcal{P}^E$, como enunciado na próxima proposição.

Proposição 5.7 (dual isomorfismo de reticulados) – O mapeamento do reticulado E das erosões no reticulado das funções de E em $\mathcal{P}(E)$, $\epsilon \mapsto a_\epsilon$, é um dual isomorfismo de reticulado, isto é, $\epsilon \mapsto a_\epsilon$ é uma bijeção e para todo ϵ_1 e ϵ_2 em E,

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \Leftrightarrow a_{\epsilon_2} \leq a_{\epsilon_1} . \qquad \text{(antitonia dupla)}$$

□

Prova – Pela Proposição 5.6, $\epsilon \mapsto a_\epsilon$ é uma bijeção. Para todo ϵ_1 e ϵ_2 em E,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \leq \epsilon_2 &\Leftrightarrow \underline{\epsilon_2} \leq \underline{\epsilon_1} && \text{(Proposição 5.5)} \\ &\Leftrightarrow a_{\underline{\epsilon_2}} \leq a_{\underline{\epsilon_1}} && \text{(Proposição 3.11)} \\ &\Leftrightarrow a_{\epsilon_2} \leq a_{\epsilon_1}. && \text{(Proposição 5.6)} \end{aligned}$$

□

Como já foi indicado no Capítulo 3, o conjunto das erosões, provido da relação de ordem $\leq$, é um *reticulado completo*. Em particular, no caso das erosões, para todo $\Psi \subset \mathrm{E}$, temos

$$\sup_{\mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \Psi \leq \sup_{\mathrm{E}} \Psi \quad \text{e} \quad \inf_{\mathrm{E}} \Psi = \inf_{\mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \Psi.$$

Proposição 5.8 (propriedade da união e interseção de erosões) – Seja $(\epsilon_i)_{i \in I}$ uma família de erosões sobre $\mathcal{P}$ e seja $(a_i)_{i \in I}$ a família das respectivas funções estrutrantes, isto é, $a_i = a_{\epsilon_i}$ para todo $i \in I$. Então

$$\bigwedge_{i \in I} \epsilon_i = \epsilon_{\bigvee_{i \in I} a_i}$$

$$\bigvee_{i \in I} \epsilon_i \leq \epsilon_{\bigwedge_{i \in I} a_i}. \qquad \square$$

Prova – A prova é similar a da Proposição 3.12. $\square$

Em particular, a interseção de duas erosões coincide com a erosão que tem como função estruturante a união das funções estruturantes. A união de duas erosões é menor que a erosão que tem como função estruturante a interseção das funções estruturantes. Em outros termos,

$$\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 = \epsilon_{a_1 \vee a_2} \quad \text{e} \quad \epsilon_1 \vee \epsilon_2 \leq \epsilon_{a_1 \wedge a_2}$$

Pelas Proposições 3.5, 5.4 e 5.6, para todo $a \in \mathcal{P}^E$, o par (ϵ_a, δ_a) é uma conexão de Galois. Então, pela Proposição 5.1, para todo $a \in \mathcal{P}^E$,

$$X \supset \delta_a(Y) \Leftrightarrow Y \subset \epsilon_a(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}),$$

e pela Proposição 5.2,

$$\epsilon_a(X) = \sup\{Y \in \mathcal{P} : X \supset \delta_a(Y)\} \quad (X \in \mathcal{P})$$

$$\delta_a(Y) = \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \epsilon_a(X)\} \quad (Y \in \mathcal{P}).$$

De uma maneira similar ao caso geral, podemos caracterizar as erosões invariantes por translação.

Proposição 5.9 (conexão de Galois invariante por translação) – Seja Δ' o conjunto das dilatações invariantes por translação sobre $\mathcal{P}$ e seja E' o das erosões invariantes por translação sobre $\mathcal{P}$. Sejam α e β dois operadores sobre $\mathcal{P}$. Se o par (α, β) é uma *conexão de Galois* entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$, então

(1) $\alpha \in \mathrm{E}' \Rightarrow \beta \in \Delta'$

(2) $\beta \in \Delta' \Rightarrow \alpha \in \mathrm{E}'$. $\square$

Prova – Para provar (1), basta, pela Proposição 5.4, mostrar que se ε é i.t., então $\underline{\epsilon}$ é também i.t.. Para todo $\alpha \in \mathrm{E}'$, Y em $\mathcal{P}$ e u em E,

$$\begin{aligned}
\underline{\epsilon}(Y+u) &= \inf\{X \in \mathcal{P} : Y + u \subset \epsilon(X)\} && \text{(definição de } \underline{\epsilon}\text{)}\\
&= \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \epsilon(X) - u\} && \text{(propriedade do translado)}\\
&= \inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \epsilon(X - u)\} && (\varepsilon \text{ é i.t.})\\
&= (\inf\{X \in \mathcal{P} : Y \subset \epsilon(X)\}) + u && \text{(propriedade do translado)}\\
&= \underline{\epsilon}(Y) + u. && \text{(definição de } \underline{\epsilon}\text{)}
\end{aligned}$$

Isto é, $\underline{\epsilon}$ é também i.t. A prova de (2) é similar. $\square$

Proposição 5.10 (caracterização das erosões i.t.) – Seja E' o conjunto das erosões invariantes por translação. O mapeamento de E' em $\mathcal{P}(E)$,

$$\epsilon \mapsto B_\epsilon\,,$$

onde B_ϵ é o subconjunto dado por

$$B_\epsilon = \inf\{X \in \mathcal{P} : o \in \epsilon(X)\}$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$B \mapsto \epsilon_B \,,$$

onde ϵ_B é a erosão invariante por translação. dada por

$$\epsilon_B(X) = X \ominus B \quad (X \in \mathcal{P}).$$

Para todo $\epsilon \in \mathrm{E}'$, $B_\epsilon = B_{\underline{\epsilon}}$ e para todo $B \in \mathcal{P}$, $\epsilon_B = \overline{\delta_B}$. □

Prova – A prova é similar a da Proposição 5.6. Precisamos apenas verificar que se ε é i.t., então $\underline{\epsilon}$ é também i.t.. Isto decorre das Proposições 5.2 e 5.9. □

Pelas Proposições 5.4 e 5.10, para todo $B \in \mathcal{P}$, o par (ϵ_B, δ_B) é uma conexão de Galois. Então, pela Proposição 5.1, para todo $B \in \mathcal{P}$,

$$X \supset \delta_B(Y) \;\Leftrightarrow\; Y \subset \epsilon_B(X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}).$$

A Figura 5.5 ilustra a implicação ⇐ e a Figura 5.6 a implicação ⇒.

Pela Proposição 5.2,, para todo $B \in \mathcal{P}$,

$$\epsilon_B(X) = \sup\{Y \in \mathcal{P} :\; X \supset \delta_B(Y)\} \quad (X \in \mathcal{P})$$

$$\delta_B(Y) = \inf\{X \in \mathcal{P} :\; Y \subset \epsilon_B(X)\} \quad (Y \in \mathcal{P}).$$

Exercício 5.2 (Conexão de Galois) – Seja $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e seja $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine $\delta_B \epsilon_B(X)$. Verifique que $\delta_B \epsilon_B(X) \subset X$. Dê uma razão para isto ocorrer. □

A noção de conexão de Galois, apresentada nesta seção, permitiu definir uma primeira dualidade entre as dilatações e as erosões, que será muito útil para introduzir as aberturas e fechamentos morfologicos, no próximo capítulo. Na próxima seção, vamos introduzir uma segunda dualidade.

5.2 Dualidade por complementação.

Vamos agora definir as noções de operador dual por complementação e de transposto de uma função estruturante.

Definição 5.2 (dualidade por complementação) – Seja ψ um operador sobre $\mathcal{P}$. O *dual (por complementação) de* ψ é o operador sobre $\mathcal{P}$, denotado ψ^* e dado por

$$\psi^*(X) = \psi(X^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \quad (X \in \mathcal{P}).$$ □

Dois operadores α e β sobre $\mathcal{P}$ são *mutuamente duais por complementação* se e somente se as propriedades equivalentes abaixo são satisfeitas

(1) $x \in \beta(X^{\mathrm{c}}) \;\Leftrightarrow\; x \in \alpha(X)^{\mathrm{c}} \quad (x \in E, X \in \mathcal{P})$

(2) $\alpha = \beta^*$

(3) $\beta = \alpha^*$.

Exercício 5.3 (operadores mutuamente duais) – Prove a equivalência entre as três propriedades acima. □

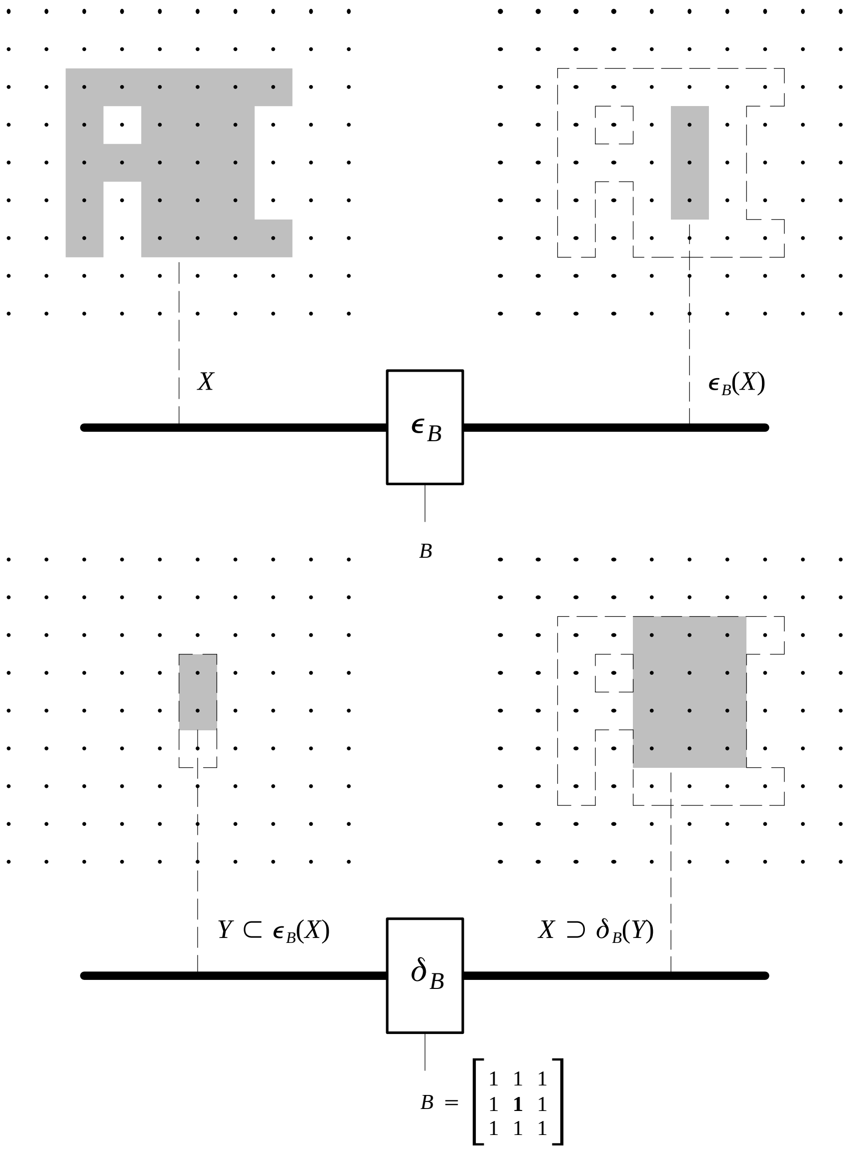

Fig. 5.5 – Propriedade de uma conexão de Galois (começando pela erosão).

Prova – Vamos provar que (1) implica (2). Para todo $X \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
\alpha(X) &= ((\alpha(X)^c)^c && \text{(idempotência da complementação)}\\
&= \{x \in E : x \in \beta(X^c)\}^c && \text{(Hipótese (1))}\\
&= \{x \in E : x \notin \beta(X^c)\} && \text{(definição de complemento)}\\
&= \{x \in E : x \in \beta(X^c)^c\} && \text{(definição de complemento)}\\
&= \beta(X^c)^c && \text{(dedução lógica)}\\
&= \beta^*(X). && \text{(definição de operador dual)}
\end{aligned}$$

Isto é, sob a Hipótese (1), $\alpha = \beta^*$.

Vamos provar que (2) implica (3). Para todo $X \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
\alpha^*(X) &= (\beta^*)^*(X) && \text{(Hipótese (2))}\\
&= \beta^*(X^c)^c && \text{(definição de operador dual)}\\
&= (\beta((X^c)^c)^c)^c && \text{(definição de operador dual)}\\
&= \beta(X). && \text{(idempotência da complementação)}
\end{aligned}$$

Isto é, sob a Hipótese (2), $\beta = \alpha^*$.

Vamos provar que (3) implica (1). Para todo $X \in \mathcal{P}$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned}
x \in \beta(X^c) &\Leftrightarrow x \in \alpha^*(X^c) && \text{(Hipótese (3))}\\
&\Leftrightarrow x \in \alpha((X^c)^c)^c && \text{(definição de operador dual)}\\
&\Leftrightarrow x \in \alpha(X)^c\,. && \text{(idempotência da complementação)}
\end{aligned}$$

Isto é, sob a Hipótese (3), $x \in \beta(X^c) \Leftrightarrow x \in \alpha(X)^c \quad (x \in E, X \in \mathcal{P})$. □

Pelas duas últimas equivalências acima, o mapeamento $\psi \mapsto \psi^*$ de $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ em $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ é uma bijeção e ele é seu próprio inverso. No caso das restrições à Δ e E podemos evidenciar um outro dual isomorfismo entre as dilatações e as erosões.

Proposição 5.11 (dual isomorfismo entre as dilatações e as erosões) – O mapeamento do reticulado completo E das erosões sobre $\mathcal{P}$, no reticulado completo Δ das dilatações sobre $\mathcal{P}$

$$\epsilon \mapsto \epsilon^*$$

é um dual isomorfismo. Isto é, $\epsilon \mapsto \epsilon^*$ é uma bijeção e para todo ϵ_1 e ϵ_2 em E,

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \Leftrightarrow {\epsilon_2}^* \leq {\epsilon_1}^*. \qquad \text{(antitonia)}$$

O inverso de $\epsilon \mapsto \epsilon^*$ é o mapeamento

$$\delta \mapsto \delta^*.$$

O gráfico de $\epsilon \mapsto \epsilon^*$ é o conjunto de todos pares de erosão–dilatação mutuamente duais por complementação. □

Prova – Temos que provar que se $\epsilon \in \mathrm{E}$ então $\epsilon^* \in \Delta$. Para todo $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$, seja

$$\mathcal{Y}' = \{X \in \mathcal{P} : X^c \in \mathcal{Y}\}.$$

Para todo $\epsilon \in \mathrm{E}$ e $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
\epsilon^*(\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y) &= (\epsilon(\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y)^c)^c && \text{(definição de dual por complementação)}\\
&= (\epsilon(\bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} Y^c))^c && \text{(lei de Morgan generalizada)}\\
&= (\epsilon(\bigcap_{X \in \mathcal{Y}'} X))^c && \text{(definição de } \mathcal{Y}'\text{)}\\
&= (\bigcap_{X \in \mathcal{Y}'} \epsilon(X))^c && \text{(definição de erosão)}
\end{aligned}$$

$$= (\bigcap_{Y \in \mathcal{Y}} \epsilon(Y^c))^c \qquad \text{(definição de } \mathcal{Y}'\text{)}$$

$$= \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} (\epsilon(Y^c))^c \qquad \text{(lei de Morgan generalizada)}$$

$$= \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} \epsilon^*(Y). \qquad \text{(definição de dual por complementação)}$$

Isto é, ϵ^* é uma dilatação.

Da mesma maneira, podemos provar que se $\delta \in \Delta$ então $\delta^* \in \mathrm{E}$.

Como $\epsilon = (\epsilon^*)^*$ e $\delta = (\delta^*)^*$, $\epsilon \mapsto \epsilon^*$ é uma bijeção e seu inverso é $\delta \mapsto \delta^*$.

Vamos provar a antitonia de $\epsilon \mapsto \epsilon^*$. Para todo ϵ_1 e ϵ_2 em E,

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 \le \epsilon_2 &\Leftrightarrow \epsilon_1(X) \subset \epsilon_2(X) \ (X \in \mathcal{P}) && \text{(definição de } \le\text{)} \\
&\Leftrightarrow \epsilon_1(Y^c) \subset \epsilon_2(Y^c) \ (Y \in \mathcal{P}) && \text{(a complementação é uma bijeção)} \\
&\Leftrightarrow (\epsilon_2(Y^c))^c \subset (\epsilon_1(Y^c))^c \ (Y \in \mathcal{P}) && \text{(antitonia da complementação)} \\
&\Leftrightarrow \epsilon_2^*(Y) \subset \epsilon_1^*(Y) \ (Y \in \mathcal{P}) && \text{(definição de dual por complementação)} \\
&\Leftrightarrow \epsilon_2^* \le \epsilon_1^* . && \text{(definição de } \le\text{)}
\end{aligned}$$

Finalmente, para todo $\epsilon \in \mathrm{E}$, o par (ϵ, ϵ^*) é formado por uma erosão e por uma dilatação, que são mutuamente duais por complementatção. Inversamente, em todo par (ϵ, δ), formado por uma erosão e por uma dilatação mutuamente duais por complementação, δ é o dual (por complementação) de ε, isto é, (ϵ, δ) pertence ao gráfico de $\epsilon \mapsto \epsilon^*$. Em outros termos, o gráfico de $\epsilon \mapsto \epsilon^*$ é o conjunto de todos pares de erosão–dilatação mutuamente duais por complementação. □

A Proposição 5.11 é uma outra maneira de mostrar que existe uma correspondência um por um entre Δ e E. A Figura 5.7 ilustra este resultado.

Definição 5.3 (transposto de uma função estruturante) – Seja a uma função de E em $\mathcal{P}(E)$. O *transposto de a* é a função de E em $\mathcal{P}(E)$, denotado a^t e dada por

$$a^t(x) = \{y \in E : x \in a(y)\} \quad (x \in E). \qquad □$$

Exercício 5.4 (definição equivalente de dilatação por uma função estrurante) – Seja δ_a uma dilatação sobre $\mathcal{P}(E)$ de função estruturante a, prove que para todo $Y \in \mathcal{P}$,

$$\delta_a(Y) = \{x \in E : a^t(x) \cap Y \ne \emptyset\}. \qquad □$$

Duas *funções a* e b de E em $\mathcal{P}(E)$ são *mutuamente transpostas* se e somente se as proposições equivalentes abaixo são satisfeitas

$$x \in a(y) \Leftrightarrow y \in b(x) \quad (x, y \in E) ;$$

$$a = b^t ;$$

$$b = a^t .$$

Pelas duas últimas equivalências acima, o mapeamento $a \mapsto a^t$ de $\mathcal{P}^E$ em $\mathcal{P}^E$ é uma bijeção e ele é seu próprio inverso.

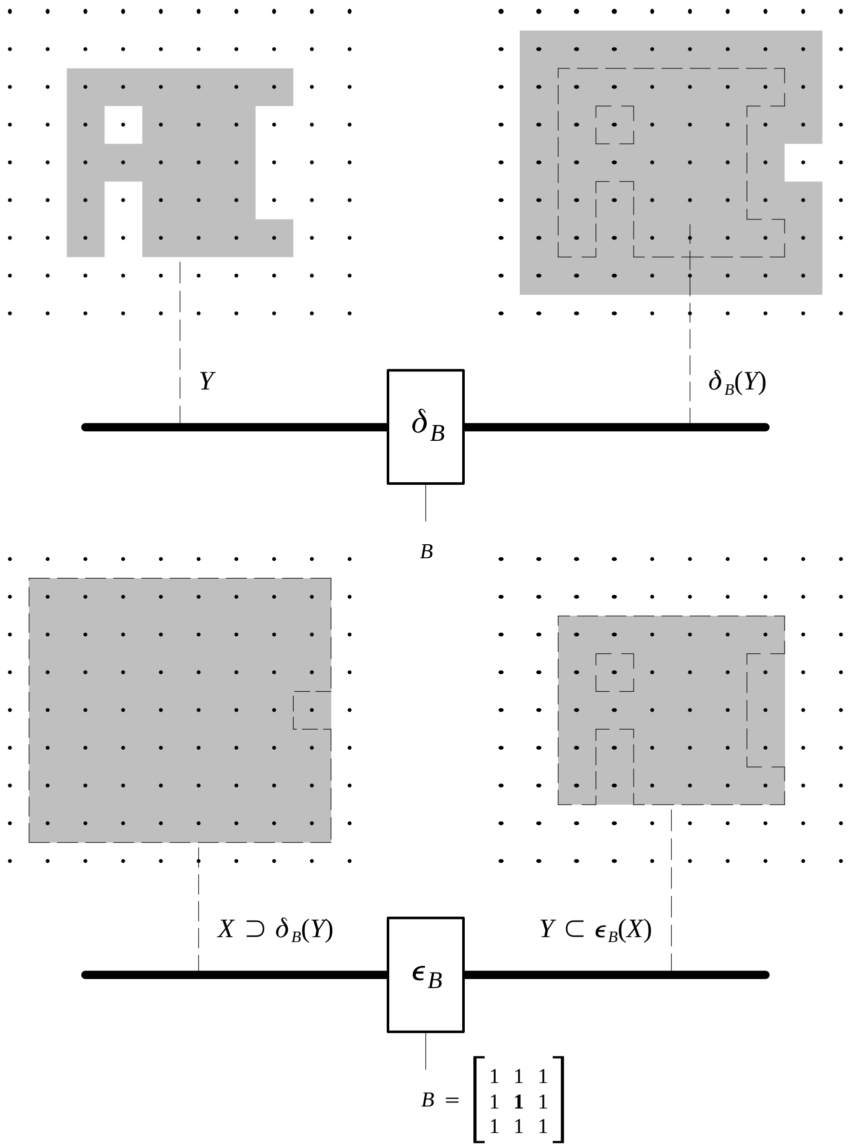

Fig. 5.6 – Propriedade de uma conexão de Galois (começando pela dilatação).

Proposição 5.12 (transposição versus dualidade por complementação) – As proposições abaixo são equivalentes. Para todo a e b em $\mathcal{P}^E$,

a e b mutuamente transpostos $\Leftrightarrow$ δ_a e ϵ_b mutuamente duais por complementação;

$\delta_a{}^* = \epsilon_{a^t}$;

$\epsilon_b{}^* = \delta_{b^t}$. □

Prova – Vamos provar a segunda proposição. Para todo a em $\mathcal{P}^E$ e X em $\mathcal{P}$,

$$\delta_a{}^*(X) = (\delta_a(X^c))^c \qquad \text{(definição de dual por complementação)}$$
$$= \{x \in E : \ a^t(x) \cap X^c \neq \emptyset\}^c \qquad \text{(Exercício 5.4)}$$

$$= \{x \in E : a^t(x) \cap X^c = \emptyset\} \qquad \text{(definição de complemento)}$$
$$= \{x \in E : a^t(x) \subset X\} \qquad \text{(consistência entre } \cap \text{ e } \subset)$$
$$= \epsilon_{a^t}(X) \; . \qquad \text{(definição de erosão por uma função estruturante)}$$

Isto é, $\delta_a{}^* = \epsilon_{a^t}$.

Em outros termos, a composição de $\delta \mapsto \delta^*$ por $a \mapsto \delta_a$, isto é, $a \mapsto \delta_a{}^*$ é idêntica a composição de $b \mapsto \epsilon_b$ por $a \mapsto a^t$, isto é, $a \mapsto \epsilon_{a^t}$.

As outras proposições decorrem deste resultado usando o fato que os mapeamentos $\delta \mapsto \delta^*$, $a \mapsto \delta_a$, $b \mapsto \epsilon_b$ e $a \mapsto a^t$ são bijeções. □

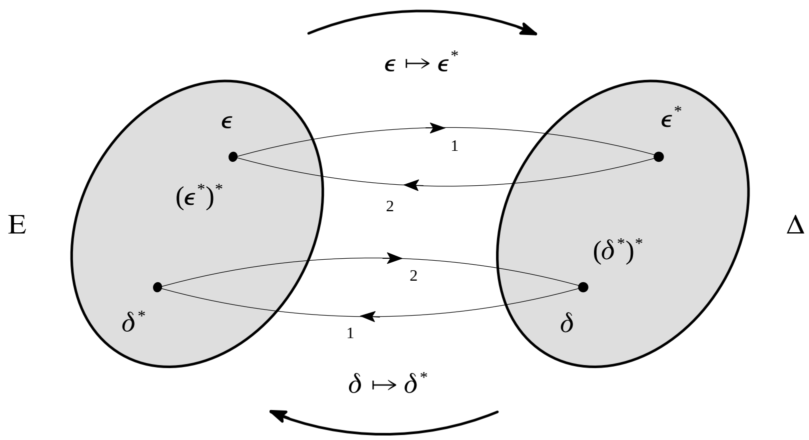

Fig. 5.7 – Bijeção entre as erosões e as dilatações através da dualidade por complementação.

A Figura 5.8 ilustra o resultado da Proposição 5.12 e mostra como ele é obtido.

Quando E é um grupo Abeliano, dois subconjuntos A e B de E são *mutuamente transpostos* se e somente se as proposições equivalentes abaixo são satisfeitas

(1) $x \in A + y \Leftrightarrow y \in B + x \quad (x, y \in E)$

(2) $A = B^t$

(3) $B = A^t$.

Exercício 5.5 (subconjuntos mutuamente transpostos) – Prove a equivalência entre as três propriedades acima. □

No caso invariante por translação temos resultados similares aos da Proposição 5.12. Por exemplo, as propriedades abaixo são equivalentes. Para todo A e B em $\mathcal{P}$,

(1) A e B mutuamente transpostos $\Leftrightarrow$ δ_A e ϵ_B mutuamente duais por complementação

(2) $\delta_A{}^* = \epsilon_{A^t}$

(3) $\epsilon_B{}^* = \delta_{B^t}$.

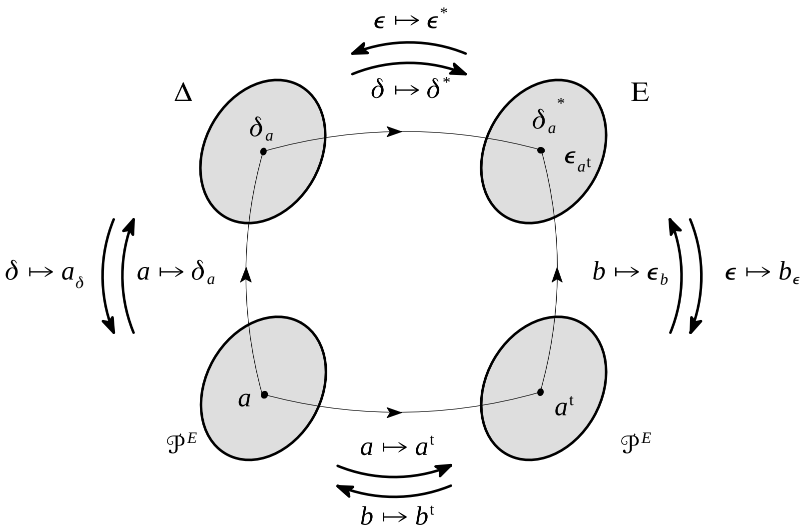

Fig. 5.8 – Transposição versus dualidade por complementação.

Quando A e B são simétricos, as duas igualdades acima simplificam–se e temos

$${\delta_A}^* = \epsilon_A \quad \text{e} \quad {\epsilon_B}^* = \delta_B.$$

As Figuras 5.9 e 5.10 ilustram estas igualdades no caso $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

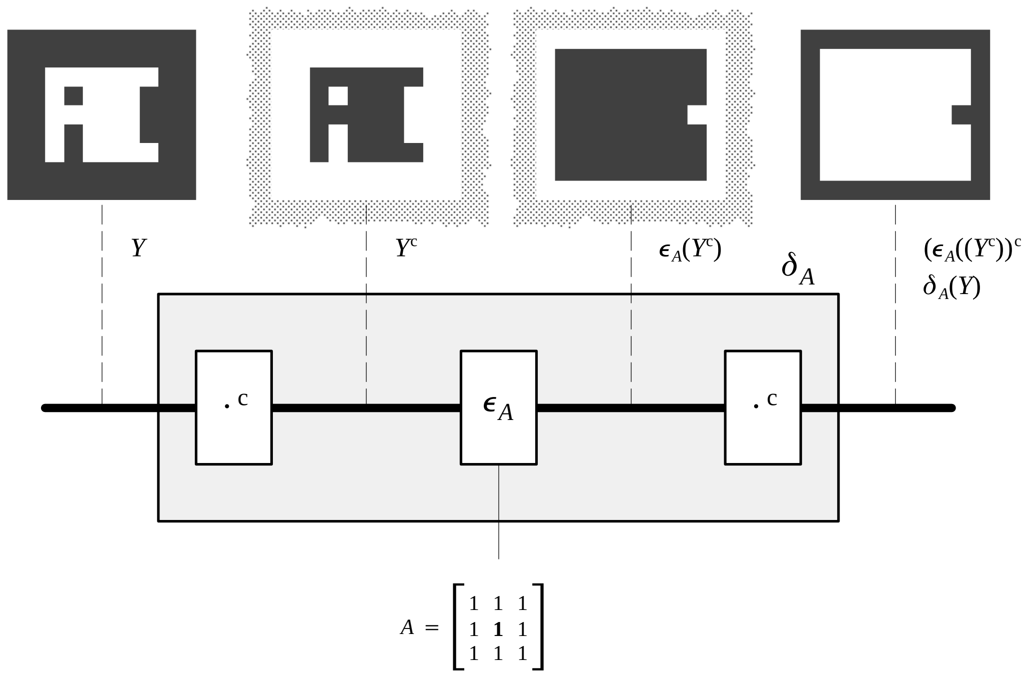

Fig. 5.9 – Dualidade por complementação (usando uma erosão).

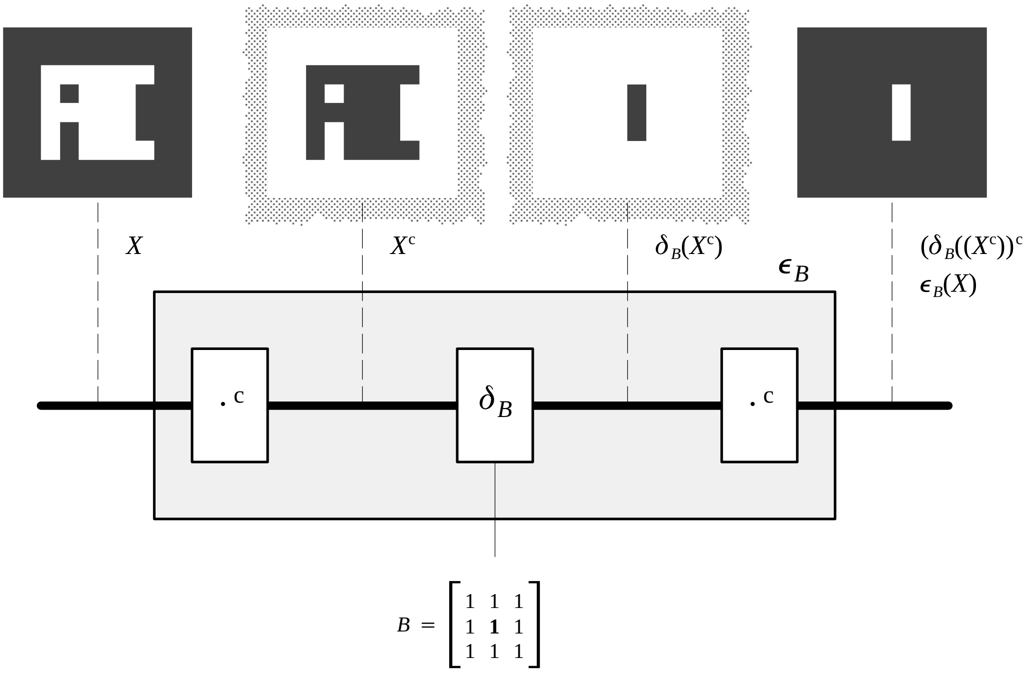

Fig. 5.10 – Dualidade por complementação (usando uma dilatação).