Capítulo 2

Álgebra e imagens binárias

Em Análise de Imagens, os objetos mais simples que manipulamos são as imagens binárias. Estas imagens são representadas matematicamente por subconjuntos ou, de maneira equivalente, por funções binárias. Nos seus primórdios, a Morfologia Matemática era usada para estudar o relacionamento entre os meios porosos e sua permeabilidade [Mather67, Serra82]. Neste caso, os objetos considerados eram os grãos, que eram representados matematicamente por subconjuntos do espaço Euclidiano de 2 ou 3 dimensões.

Neste capítulo, apresentamos as duas estruturas matemáticas apropriadas para descrever as imagens binárias e suas operações: a álgebra de Boole e o reticulado completo. Para falar da equivalência entre os subconjuntos e as funções binárias, apresentamos também a noção de isomorfismo.

As noções de reticulado completo e isomorfismo, apresentadas neste capítulo, serão usadas também para descrever outros conjuntos de interesse nos próximos capítulos.

2.1 Subconjuntos versus funções binárias

Nesta seção, vamos mostrar a equivalência entre subconjuntos e funções binárias.

Seja E um conjunto não vazio. Um elemento genérico de E é denotado x. Temos então $x \in E$. Um subconjunto de E é denotado genericamente por X. A coleção de todos os subconjuntos de E é denotada $\mathcal{P}(E)$. Temos então $X \in \mathcal{P}(E)$.

Definição 2.1 (função binária) **–** Uma *função binária* definida sobre E é um mapeamento de E em $\{0,1\}$, isto é, para *cada* elemento de E a função binária toma um *único* valor 0 ou 1. □

Uma função binária definida em E é denotada genericamente por

$$f: \quad E \rightarrow \{0,1\}.$$

O conjunto de todas as funções binárias definidas em E é denotado $\{0,1\}^E$. Temos então $f \in \{0,1\}^E$.

Denota–se por $f(x)$ o elemento de $\{0,1\}$ associado ao ponto x de E através de f. O conhecimento de $f(x)$, para todo x em E, define sem ambigüidade a função f que passe então a ser denotada

$$f: \quad x \mapsto f(x).$$

O *gráfico de uma função* é o conjunto de todos os pares $(x, f(x))$. O gráfico de uma função f indica qual é o valor tomado por f em cada ponto x de E. A Figura 2.1 mostra o gráfico de uma função binária f particu-

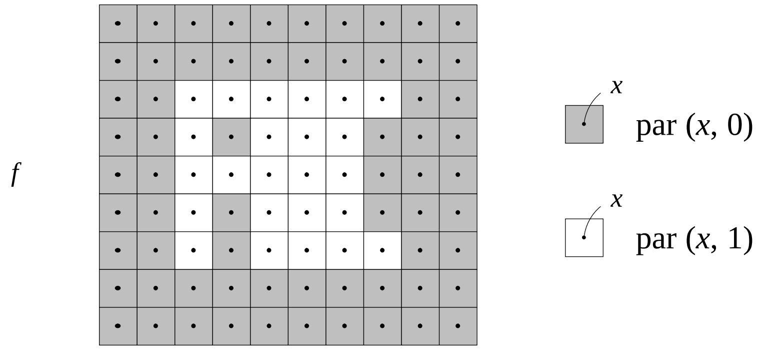

Fig. 2.1 – Gráfico de uma função binária.

lar. Nesta figura, os elementos de E estão representados por pontos pretos, os pares $(x,0)$ estão representados em cinza e os pares $(x,1)$ em branco.

Ao nos referirmos ao gráfico de uma função usaremos, quando não houver inconveniência, simplesmente a palavra função a qual ele é equivalente.

A fim de estabelecermos formalmente a equivalência entre as noções de função binária e de subconjunto, precisamos definir as noções de suporte de uma função e de função indicadora de um subconjunto.

O *suporte da função* $f \in \{0,1\}^E$, denotado suporte(f), é o subconjunto de E dado por

$$\text{suporte}(f) = \{x \in E : f(x) \neq 0\}.$$

A *função indicadora de um subconjunto* $X \in \mathcal{P}(E)$, denotado 1_X, é a função de E em $\{0,1\}$ dada por

$$1_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (x \in E).$$

A Figura 2.2 mostra um exemplo de um subconjunto X (conjunto dos pontos pretos na área cinza) e de uma função binária f. Neste exemplo, a função binária f coincide com a função indicadora de X e, por sua vez, X coincide com o suporte de f.

Proposição 2.1 (relação entre subconjuntos e funções binárias) – O mapeamento de $\mathcal{P}(E)$ em $\{0,1\}^E$

$$X \mapsto 1_X$$

é uma bijeção, seu inverso é

$$f \mapsto \text{suporte}(f). \qquad \square$$

Prova – Em primeiro lugar, para todo X em $\mathcal{P}(E)$ e x em E, temos

$$\begin{aligned} x \in \text{suporte}(1_X) &\Leftrightarrow 1_X(x) \neq 0 && \text{(definição de suporte)} \\ &\Leftrightarrow 1_X(x) = 1 && \text{(propriedade das funções em } \{0,1\}^E) \\ &\Leftrightarrow x \in X, && \text{(definição de função indicadora)} \end{aligned}$$

em outros termos, para todo X em $\mathcal{P}(E)$, suporte$(1_X) = X$. Isto prova que o mapeamento $X \mapsto 1_X$ é injetor.

Em segundo lugar, para todo f em $\{0,1\}^E$ e x em E, temos

$$
\begin{aligned}
1_{\text{suporte}(f)}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in \text{suporte}(f) && \text{(definição de função indicadora)}\\
&\Leftrightarrow f(x) \neq 0 && \text{(definição de suporte)}\\
&\Leftrightarrow f(x) = 1, && \text{(propriedade das funções binárias)}
\end{aligned}
$$

isto é, $1_{\text{suporte}(f)}(x) = f(x)$,

em outros termos, para todo f em $\{0,1\}^E$, $1_{\text{suporte}(f)} = f$. Isto prova que o mapeamento $X \mapsto 1_X$ é sobrejetor e, consequentemente, uma bijeção. □

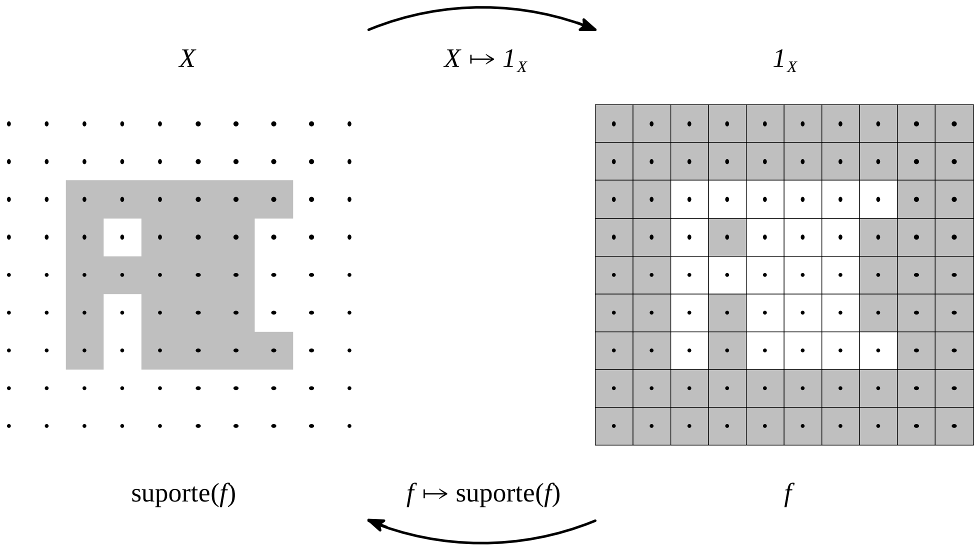

Fig. 2.2 – Função indicadora e suporte.

A Proposição 2.1 mostra que existe uma correspondência um por um entre $\mathcal{P}(E)$ e $\{0,1\}^E$. A Figura 2.3 ilustra este resultado.

Uma *imagem em preto e branco* ou *imagem binária* definida numa *grade* E, formada por seus *elementos de imagem* ou *pixels* é, então, convenientemente representada tanto por um subconjunto de E quanto por uma função binária de E em $\{0,1\}$.

No caso de uma representação por um subconjunto, a imagem binária é assimilada ao subconjunto X dos elementos x de E que representam a *posição* dos pixels *brancos*. Por abuso de linguagem, o subconjunto X é então chamado de imagem.

No caso de uma representação por uma função binária a imagem é assimilada à função binária f de E em $\{0,1\}$, que toma o valor 0 nos elementos x de E que representam a *posição* dos pixels *pretos* e o valor 1 nos elementos x de E que representam a *posição* dos pixels *brancos*. Por abuso de linguagem, a função binária f é, então, chamada de imagem e para todo x em E, o par $(x, f(x))$ é chamado de *pixel da imagem* f, x é a *posição do pixel* e $f(x)$ é seu *valor.*

O subconjunto X e a função binária f da Figura 2.2 são representações matemáticas equivalentes da imagem binária mostada na Figura 2.4.

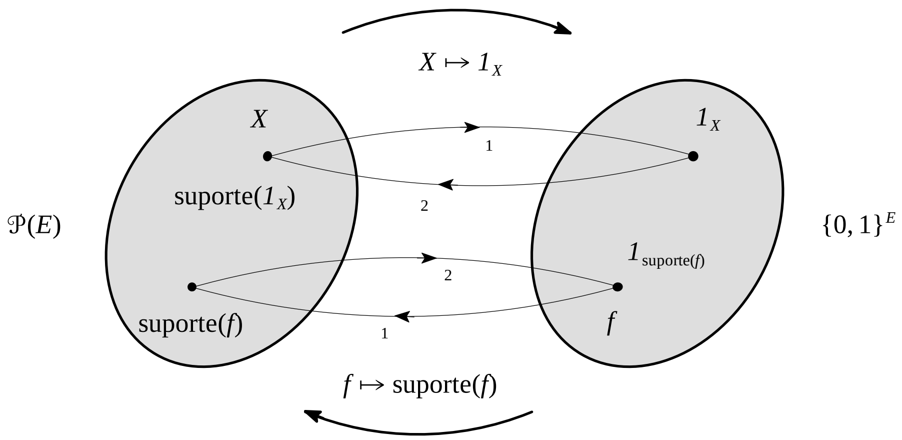

Fig. 2.3 – Bijeção entre os subconjuntos e as funções binárias.

Do ponto de visto computacional, a representação por um subconjunto é realizada através de uma lista de *posições* x cujos ponteiros não têm nenhum significado particular, enquanto a representação por uma função binária é realizada através de uma lista de *valores* $f(x)$ cujo ponteiro tem o significado de *posição* x.

Dependendo da proporção de pixels brancos na imagem, pode–se preferir uma representação ou outra. A representação por subconjuntos é conveniente para imagens cuja proporção de pixels brancos é baixa, enquanto a representação por funções binárias é conveniente para imagens possuidindo uma proporção arbitrária de pixels brancos.

Fig. 2.4 – Imagem binária.

2.2 Álgebras de Boole dos subconjuntos e das funções binárias

As operações sobre as imagens binárias são aquelas que derivam das operações usuais sobre subconjuntos (ou funções binárias). Com estas operações, as imagens têm uma estrutura de Álgebra de Boole.

A coleção $\mathcal{P}(E)$ de todos os subconjuntos de E provida das operações habituais de união, interseção de subconjuntos e complementação de subconjunto forma uma *álgebra de Boole* denotada $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, \cdot^c)$. Em outros termos, estas operações verificam os axiomas abaixo [BirLan65, p. 258].

Para todo subconjunto A, B e C em $\mathcal{P}(E)$,

$$A \cup A = A \quad \text{e} \quad A \cap A = A \qquad (\textit{idempotência})$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{e} \quad A \cap B = B \cap A \qquad (\textit{comutatividade})$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (\textit{associatividade})$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad \text{e} \quad A \cap (A \cup B) = A \qquad (\textit{absorção})$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{e} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (\textit{distributividade})$$

existem dois subconjuntos $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ em $\mathcal{P}(E)$ tais que

$$A \cup \mathit{0} = \mathit{0} \cup A = A \quad \text{e} \quad A \cap \mathit{1} = \mathit{1} \cap A = A \qquad (\textit{identidade})$$

$$A \cap \mathit{0} = \mathit{0} \cap A = \mathit{0} \quad \text{e} \quad A \cup \mathit{1} = \mathit{1} \cup A = \mathit{1} \qquad (\textit{lei dos nulos})$$

$$A^{c} \cup A = A \cup A^{c} = \mathit{1} \quad \text{e} \quad A^{c} \cap A = A \cap A^{c} = \mathit{0}. \qquad (\textit{complementaridade})$$

Os elementos $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ chamados de *elementos nulos* ou *neutros* são, respectivamente, os elementos $\emptyset$ e E de $\mathcal{P}(E)$.

As operações de união ($\vee$), interseção ($\wedge$) e complementação ($\sim$) entre funções binárias são construídas a partir das definições de união ($\vee$), interseção ($\wedge$) e complementação ($\sim$) entre os elementos de $\{0, 1\}$, dadas nas Tabelas 2.1 e 2.2.

Tabela 2.1 – DEFINIÇÃO DE UNIÃO E INTERSEÇÃO.

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Tabela 2.2 – DEFINIÇÃO DE COMPLEMENTAÇÃO.

a	$\sim a$
0	1
1	0

Definição 2.2 (união entre duas funções binárias) – Sejam f_1 e f_2 duas funções binárias definidas em E. A *união das funções binárias* f_1 *e* f_2 é a função binária definada em E, denotada $f_1 \vee f_2$ e dada por

$$(f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x) \quad (x \in E).$$

A operação de *união entre duas funções binárias*, denotada $\vee$, é o mapeamento dado por

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 \vee f_2. \qquad \square$$

A Figura 2.6 mostra a união $f_1 \vee f_2$ das funções f_1 e f_2 da Figura 2.5.

A Figura 2.7 ilustra, através de um bloquinho, a operação de união entre duas funções binárias e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

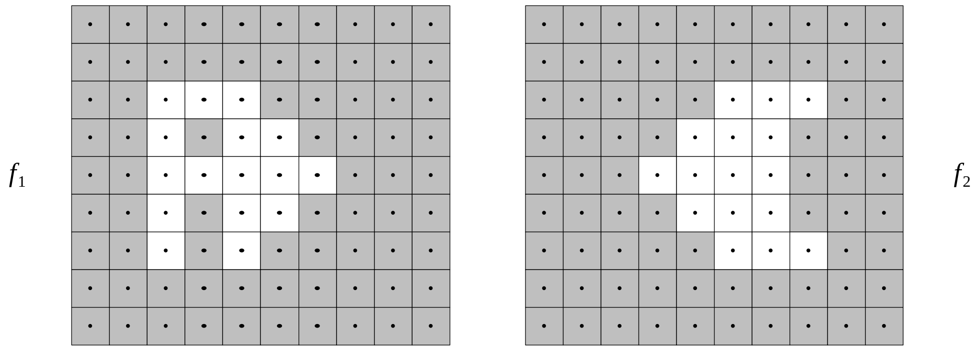

Fig. 2.5 – Duas funções binárias.

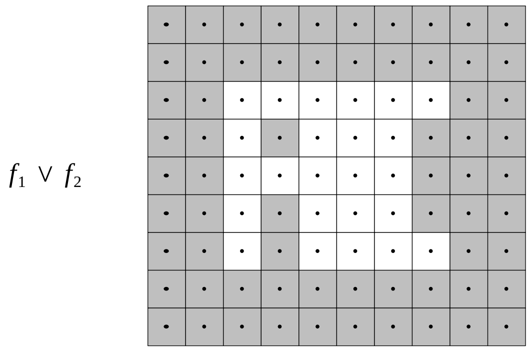

Fig. 2.6 – União de duas funções binárias.

Definição 2.3 (interseção entre duas funções binárias) – Sejam f_1 e f_2 duas funções binárias definidas em E. A *interseção das funções binárias* f_1 *e* f_2 é a função binária definada em E, denotada $f_1 \wedge f_2$ e dada por

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x) \quad (x \in E).$$

A operação de *interseção entre duas funções binárias*, denotada $\wedge$, é o mapeamento dado por

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 \wedge f_2. \qquad \square$$

A Figura 2.8 mostra a interseção $f_1 \wedge f_2$ das funções f_1 e f_2 da Figura 2.5.

A Figura 2.9 ilustra, através de um bloquinho, a operação de interseção entre duas funções binárias e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

Definição 2.4 (complementação de uma função binária) – Seja f uma função binária definida em E. O *complemento da função binária* f é a função binária definada em E, denotada $\sim f$ e dada por

$$(\sim f)(x) = \sim f(x) \quad (x \in E).$$

A operação de *complementação de função binária*, denotada $\sim$, é o mapeamento dado por

$$f \mapsto \sim f. \qquad \square$$

A Figura 2.10 mostra o complemento $\sim f$ da função f da Figura 2.1.

A Figura 2.11 ilustra, através de um bloquinho, a operação de complementação de uma função binária e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

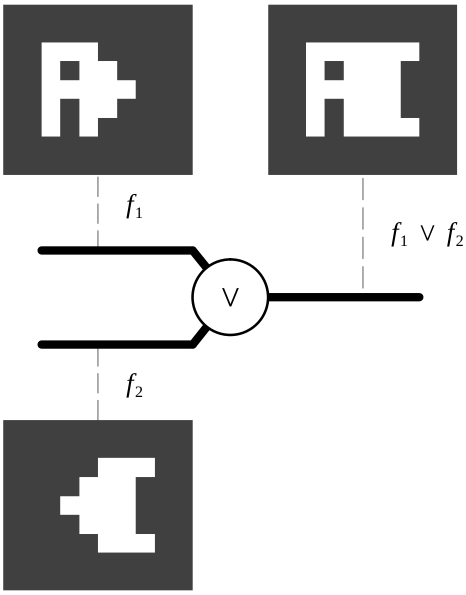

Fig. 2.7 – Operação de união entre duas funções binárias.

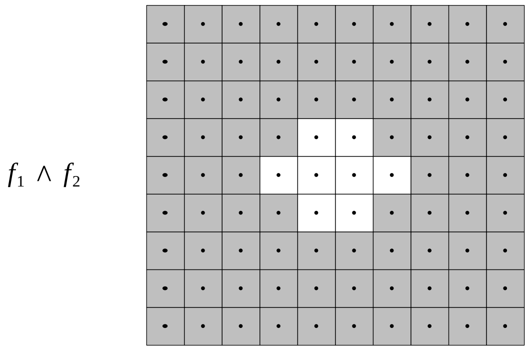

Fig. 2.8 – Interseção de duas funções binárias.

Proposição 2.2 (álgebra de Boole das funções binárias) – O conjunto $\{0, 1\}^E$ das funções binárias provido das operações de união, interseção e complementação forma uma álgebra de Boole, denotada $(\{0, 1\}^E, \vee, \wedge, \sim)$. $\square$

Prova – O conjunto $\{0, 1\}$ provido das operações de união, interseção e complementação, definidas nas Tabelas 2.1 e 2.2, é uma algebra de Boole, onde 0 e 1 são os elementos nulos. Pelo Teorema de Huntington [Birkho67, p. 44], basta verificar que para todo a, b e c em $\{0, 1\}$,

$$a \wedge b = \sim ((\sim a) \vee (\sim b))$$

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge (\sim b)) = a.$$

Assim, todos os axiomas da álgebra de Boole são verificados pelos elementos de $\{0,1\}$. Pelas Definições 2.2 – 2.4, os axiomas da álgebra de Boole são também, por herança, verificados pelos elementos de $\{0,1\}^E$. □

Os elementos nulos de $(\{0,1\}^E, \vee, \wedge, \sim)$ são as funções $0:\ x \mapsto 0$ e $1:\ x \mapsto 1$.

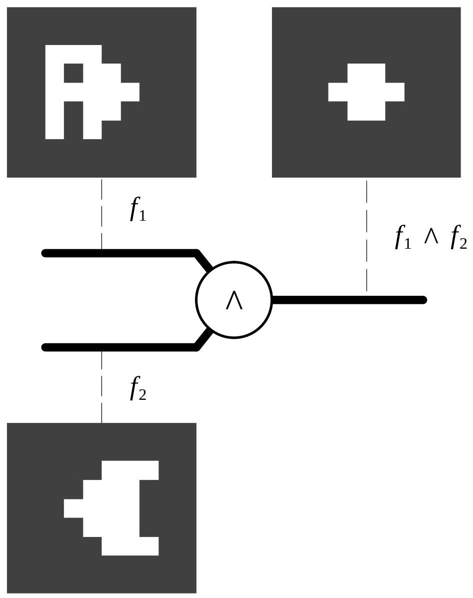

Fig. 2.9 – Operação de interseção entre duas funções binárias.

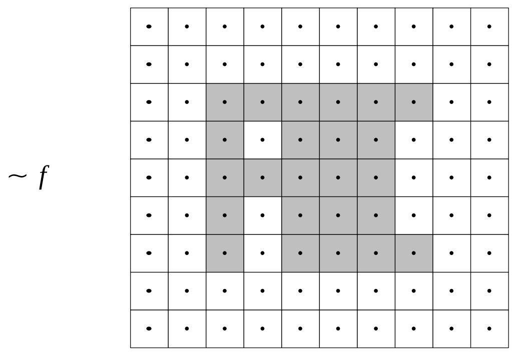

Fig. 2.10 – Complemento de uma função binária.

Proposição 2.3 (isomorfismo entre álgebras de Boole) – A álgebra de Boole dos subconjuntos de E e a álgebra de Boole das funções binárias definidas em E, são isomorfas. Em outros termos, $X \mapsto 1_X$ é um isomorfismo entre álgebras de Boole, isto é, $X \mapsto 1_X$ é uma bijeção e para todo A e B em $\mathcal{P}(E)$,

$$1_{A \cup B} = 1_A \vee 1_B$$
$$1_{A \cap B} = 1_A \wedge 1_B$$
$$1_{A^c} = \sim 1_A\,.$$ □

Prova – Pela Proposição 2.1, $X \mapsto 1_X$ é uma bijeção. Basta, então, verificar as 3 igualdades do enunciado. □

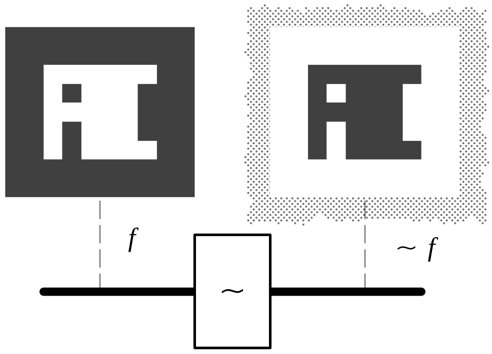

Fig. 2.11 – Operação de complementação de uma função binária.

Exercício 2.1 (prova da Proposição 2.3) – Usando as definições de função indicadora, e das operações $\cup$ e $\vee$, prove a primeira igualdade do enunciado da Proposição 2.3. □

Como consequência da Proposição 2.3, temos também que, para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$$\text{suporte}(f \vee g) = \text{suporte}(f) \cup \text{suporte}(g)$$

$$\text{suporte}(f \wedge g) = \text{suporte}(f) \cap \text{suporte}(g)$$

$$\text{suporte}(\sim f) = (\text{suporte}(f))^c.$$

A Proposição 2.3 indica que as operações de união, interseção e complementação podem ser efeituadas indiferentemente no domínio dos subconjuntos ou das funções binárias.

Combinando a operação de interseção e a de complementação, define–se a subtração habitual entre subconjuntos. A diferença entre os subconjuntos A e B de E, denotada $A - B$, é o subconjunto $A \cap B^c$.

Define–se também uma subtração equivalente entre duas funções binárias em $\{0,1\}^E$.

Definição 2.5 (subtração entre duas funções binárias) – Sejam f_1 e f_2 duas funções binárias definidas em E. A *diferença das funções binárias* f_1 *e* f_2 é a função binária definada em E, denotada $f_1 \sim f_2$ e dada por

$$f_1 \sim f_2 = f_1 \wedge (\sim f_2)\,.$$

A operação de *subtração entre duas funções binárias*, denotada $\sim$, é o mapeamento dado por

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 \sim f_2\,.$$ □

A Figura 2.12 mostra a diferença $f_2 \sim f_1$ entre as funções f_2 e f_1 da Figura 2.5.

A Figura 2.13 ilustra, através bloquinhos, a operação de subtração entre duas funções binárias e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

Exercício 2.2 (equivalência entre a subtração entre subconjuntos e a subtração entre funções binárias) – Usando as definições de $-$ e $\sim$, e a Proposição 2.3, mostre que, para todo A e B em $\mathcal{P}(E)$,

$$1_{A-B} = 1_A \sim 1_B\,.$$ □

A subtração entre duas imagens binárias é útil para comparar duas imagens como será visto na Seção 2.4.

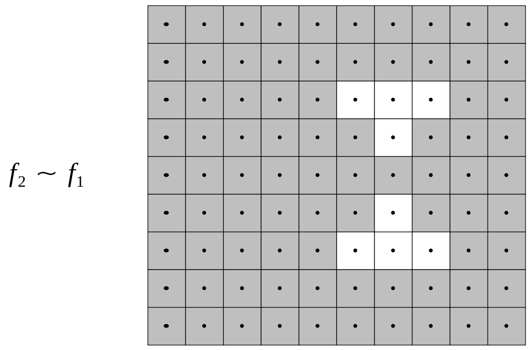

Fig. 2.12 – Diferença entre duas funções.

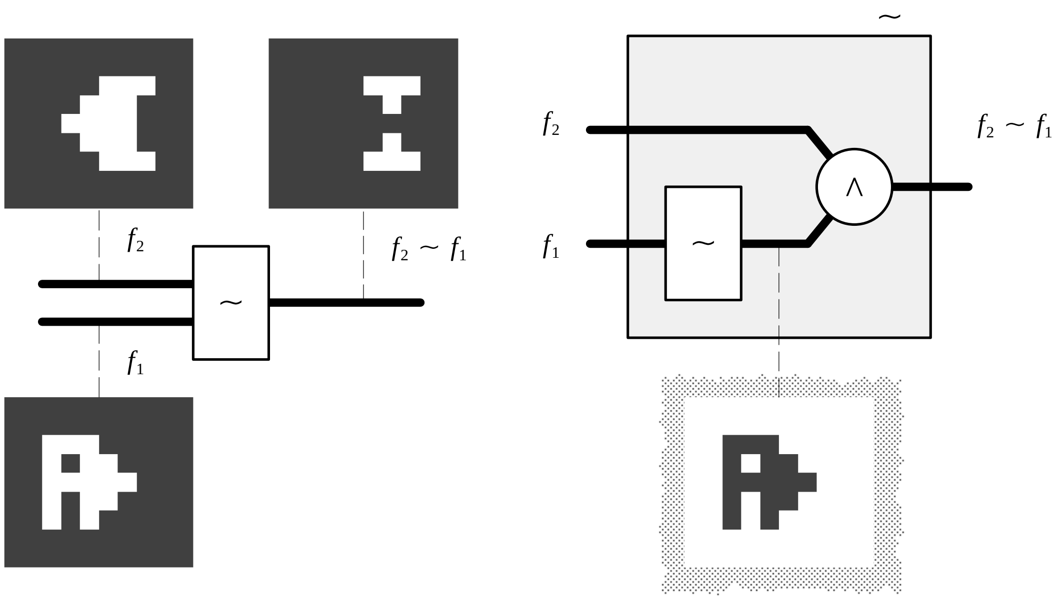

Fig. 2.13 – Operação de subtração entre duas funções binárias.

2.3 Extensão das operações de união e interseção

As operações de união e interseção entre dois subconjuntos estendem–se para famílias de subconjuntos.

Seja I um conjunto, cujos elementos serão chamados de *índices* e serão representados genericamente por i. Seja $(A_i)_{i \in I}$, ou simplesmente (A_i), quando não houver dúvida sobre o conjunto de índices, uma *família de elementos de* $\mathcal{P}(E)$ com índices em I. Uma família (A_i) é um mapeamento de I em $\mathcal{P}(E)$.

A *união da família dos subconjuntos* A_i é o subconjunto de E denotado $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ e definido por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : \exists i \in I,\ x \in A_i\}.$$

Se I for vazio então $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$.

O mapeamento $(A_i) \mapsto \bigcup_{i \in I} A_i$ é a operação de *união entre os elementos de uma família de subconjuntos*.

Da mesma maneira, a *interseção da família dos subconjuntos A_i* é o subconjunto de E denotado $\bigcap_{i \in I} A_i$ e definido por

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E : \forall i \in I,\ x \in A_i\}.$$

Se I for vazio, então $\bigcap_{i \in I} A_i = E$.

O mapeamento $(A_i) \mapsto \bigcap_{i \in I} A_i$ é a operação de *interseção entre os elementos de uma família de subconjuntos*.

As operações de união e interseção de duas funções binárias estendem–se da mesma forma para famílias de funções binárias.

Seja (a_i) uma família de elementos de $\{0, 1\}$ com índices em I. A união da família dos elementos a_i é o elemento de $\{0, 1\}$ denotado $\bigvee_{i \in I} a_i$ e definido por

$$\bigvee_{i \in I} a_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists i \in I,\ a_i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se I for vazio, então $\bigvee_{i \in I} a_i = 0$.

O mapeamento $(a_i) \mapsto \bigvee_{i \in I} a_i$ é a operação de *união entre os elementos de uma família de* 0 *e* 1 e é denotada $\bigvee$.

Da mesma maneira, a interseção da família dos elementos a_i é o elemento de $\{0, 1\}$ denotado $\bigwedge_{i \in I} a_i$ e definido por

$$\bigwedge_{i \in I} a_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \forall i \in I,\ a_i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se I for vazio então $\bigwedge_{i \in I} a_i = 1$.

O mapeamento $(a_i) \mapsto \bigwedge_{i \in I} a_i$ é a operação de *interseção entre os elementos de uma família de* 0 *e* 1 e é denotada $\bigwedge$.

Exemplos importantes de famílias de elementos de $\{0, 1\}$ são as próprias funções binárias. Neste caso, a *união* e a *interseção de uma função binária f*, isto é, respectivamente,

$$\bigvee_{x \in E} f(x) \quad \text{e} \quad \bigwedge_{x \in E} f(x)$$

são indicadores (valem 0 ou 1) que servem para testar se f é um elemento nulo da álgebra de Boole $(\{0, 1\}^E, \vee, \wedge, \sim)$. Temos

$$f = \mathit{0} \Leftrightarrow \bigvee_{x \in E} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad f = \mathit{1} \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in E} f(x) = 1.$$

A Figura 2.14 ilustra as operações de união e interseção de uma função binária f.

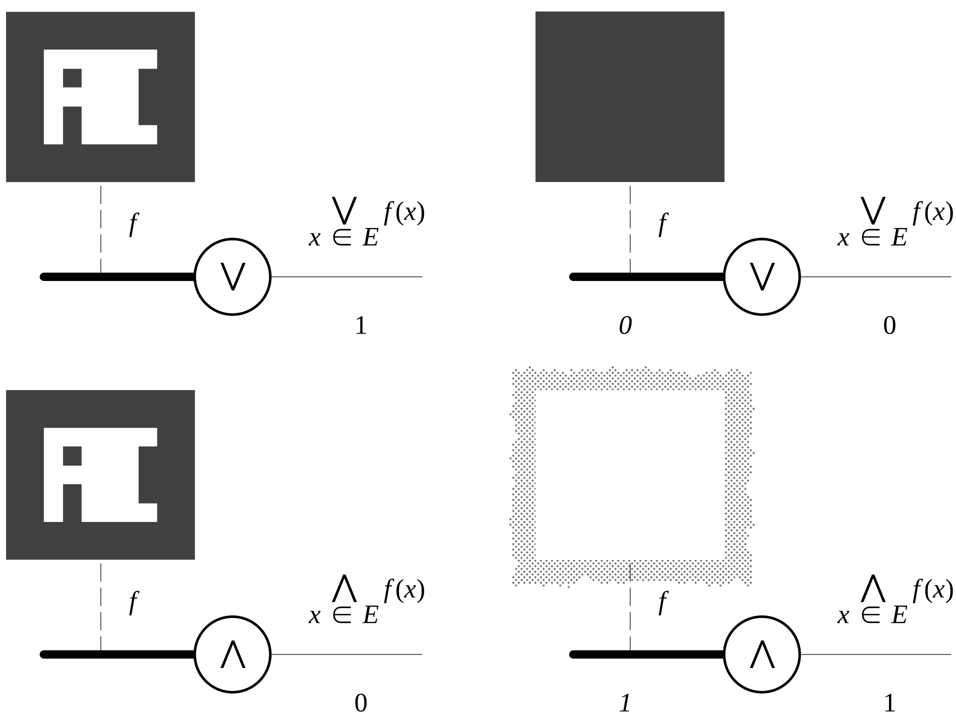

Fig. 2.14 – Operações de união e interseção de uma função binária.

Definição 2.6 (união de uma famíla de funções binárias) – Seja (f_i) uma família de funções binárias de $\{0, 1\}^E$, com índices em I. A *união da família de funções* f_i é a função binária de $\{0, 1\}^E$, denotada $\bigvee_{i \in I} f_i$ e definida por

$$(\bigvee_{i \in I} f_i)(x) = \bigvee_{i \in I} f_i(x) \quad (x \in E).$$

O mapeamento $(f_i) \mapsto \bigvee_{i \in I} f_i$ é a operação de *união entre os elementos de uma família de funções binárias*. □

Se I for vazio então $\bigvee_{i \in I} f_i$ é a função binária constante $x \mapsto 0$.

Definição 2.7 (interseção de uma famíla de funções binárias) – Seja (f_i) uma família de funções binárias de $\{0,1\}^E$, com índices em I. A *interseção da família de funções* f_i é a função binária de $\{0,1\}^E$ denotada $\bigwedge_{i \in I} f_i$ e definida por

$$(\bigwedge_{i \in I} f_i)(x) = \bigwedge_{i \in I} f_i(x) \quad (x \in E).$$

O mapeamento $(f_i) \mapsto \bigwedge_{i \in I} f_i$ é a operação de *interseção entre os elementos de uma família de funções binárias*. □

Se I for vazio, então $\bigwedge_{i \in I} f_i$ é a função binária constante $x \mapsto 1$.

Proposição 2.4 (absorção generalizada) – Seja (f_i) uma família de funções binárias de $\{0,1\}^E$, com índices em I. Para todo $k \in I$,

$$(\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge f_k = f_k \quad \text{e} \quad (\bigwedge_{i \in I} f_i) \vee f_k = f_k\,. \qquad \square$$

Prova – Para todo $k \in I$ e todo x em E,

$$f_k(x) = 1 \Leftrightarrow (\exists i \in I,\ f_i(x) = 1) \text{ e } f_k(x) = 1 \qquad (i = k)$$

$$\Leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} f_i(x) = 1) \text{ e } f_k(x) = 1$$

(definição da união de uma família de elementos de $\{0,1\}$)

$$\Leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} f_i(x)) \wedge f_k(x) = 1 \qquad \text{(definição da interseção em } \{0,1\})$$

$$\Leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} f_i)(x) \wedge f_k(x) = 1$$

(definição da união de uma família de elementos de $\{0,1\}^E$)

$$\Leftrightarrow ((\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge f_k)(x) = 1, \qquad \text{(definição da interseção em } \{0,1\}^E)$$

isto é, $f_k(x) = ((\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge f_k)(x)$; em outros termos, para todo $k \in I$,

$$f_k = (\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge f_k\,.$$

Usando um raciocínio similar, prova–se também que, para todo $k \in I$,

$$f_k = (\bigwedge_{i \in I} f_i) \vee f_k \,. \qquad \square$$

Proposição 2.5 (distributividade generalizada) – Seja (f_i) uma família de funções binárias de $\{0,1\}^E$ com índices em I. Para todo $g \in \{0,1\}^E$,

$$(\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge g = \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g) \quad \text{e} \quad (\bigwedge_{i \in I} f_i) \vee g = \bigwedge_{i \in I} (f_i \vee g). \qquad \square$$

Prova – Para todo $g \in \{0,1\}^E$ e para todo x em E,

$$((\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge g)(x) = 1 \Leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} f_i)(x) \wedge g(x) = 1$$

(definição da interseção em $\{0,1\}^E$)

$$\Leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} f_i(x)) \wedge g(x) = 1$$

(definição da união de uma família de elementos de $\{0,1\}^E$)

$$\Leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} f_i(x)) = 1 \text{ e } g(x) = 1$$

(definição da interseção em $\{0,1\}$)

$$\Leftrightarrow (\exists i \in I,\ f_i(x) = 1) \text{ e } g(x) = 1$$

(definição da união de uma família de elementos de $\{0,1\}$)

$$\Leftrightarrow \exists i \in I,\ (f_i(x) = 1 \text{ e } g(x) = 1)$$ (equivalência lógica)

$$\Leftrightarrow \exists i \in I,\ f_i(x) \wedge g(x) = 1$$ (definição da interseção em $\{0,1\}$)

$$\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} (f_i(x) \wedge g(x)) = 1$$

(definição da união de uma família de elementos de $\{0,1\}$)

$$\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g)(x) = 1$$ (definição da interseção em $\{0,1\}^E$)

$$\Leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g))(x) = 1,$$

(definição da união de uma família de elementos de $\{0,1\}^E$)

isto é, $((\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge g)(x) = (\bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g))(x)$. Em outros termos, para todo $g \in \{0,1\}^E$,

$$(\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge g = \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g).$$

Usando um raciocínio similar, prova–se também que, para todo $g \in \{0,1\}^E$,

$$(\bigwedge_{i \in I} f_i) \vee g = \bigwedge_{i \in I} (f_i \vee g). \qquad \square$$

2.4 Reticulados dos subconjuntos e das funções binárias

O primeiro conceito fundamental em Morfologia Matemática é o de relação de ordem parcial. No caso dos subconjuntos usa–se a relação habitual de inclusão. Esta relação permite a comparação de certos subconjuntos entre si.

A coleção $\mathcal{P}(E)$ de todos os subconjuntos de E provida da relação de inclusão ($\subset$) forma um *conjunto parcialmente ordenado*, denotado $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Em outros termos, esta relação verifica os três axiomas abaixo de uma *relação de ordem*.

Para todo subconjunto A, B e C em $\mathcal{P}(E)$,

$$A \subset A \qquad (\textit{reflexividade})$$

$$A \subset B \text{ e } B \subset A \Rightarrow A = B \qquad (\textit{anti–simetria})$$

$$A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C. \qquad (\textit{transitividade})$$

A comparação entre certas funções binárias se faz em termos de uma relação construída a partir da definição da relação $\le$ entre os elementos de $\{0,1\}$, dada na Tabela 2.3, onde 1 significa que a relação é “*verdadeira*” e 0 que ela é “*falsa*”. A Tabela 2.3 dá também a definição da relação $=$.

Tabela 2.3 – DEFINIÇÃO DAS RELAÇÕES BINÁRIAS.

a	b	$a=b$	$a \le b$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Definição 2.8 (relações entre duas funções binárias) – Sejam f_1 e f_2 duas funções binárias definidas em E. A *função binária* f_1 *é igual à função binária* f_2, denota–se $f_1 = f_2$, se e somente se, para todo x em E, $f_1(x) = f_2(x)$, isto é,

$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow (f_1(x) = f_2(x) \ (x \in E)).$$

A *função binária* f_1 *é menor que a função binária* f_2, denota–se $f_1 \le f_2$, se e somente se, para todo x em E, $f_1(x) \le f_2(x)$, isto é,

$$f_1 \le f_2 \Leftrightarrow (f_1(x) \le f_2(x) \ (x \in E)).$$

A relação $=$ entre funções binárias é chamada de *relação de igualdade*. A relação $\le$ entre funções binárias é chamada de *relação* “*menor que*” $\square$

A relação “menor que” é dita obtida por *ordenamento puntual*.

A Figura 2.15 mostra duas funções comparáveis no sentido que a relação "menor que", aplicada a estas duas funções, é verdadeira. As funções f_1 e f_2 da Figura 2.5 não são comparáveis, mas as funções $f_1 \wedge f_2$ e $f_1 \vee f_2$ (representadas na Figura 2.15) são comparáveis.

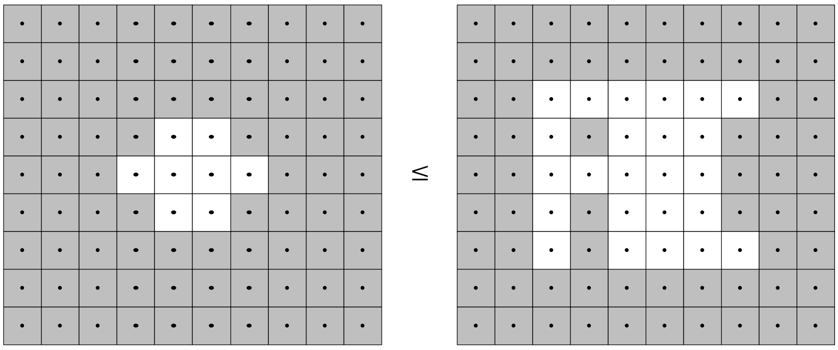

Fig. 2.15 – Duas funções binárias comparáveis.

As Figuras 2.16 e 2.17 ilustram, através de bloquinhos, a comparação entre funções binárias e os resultados obtidos em termos de imagens binárias. Por convenção, 1 na saida de um bloquinho significa que a relação é "*verdadeira*" e 0 que ela é "*falsa*".

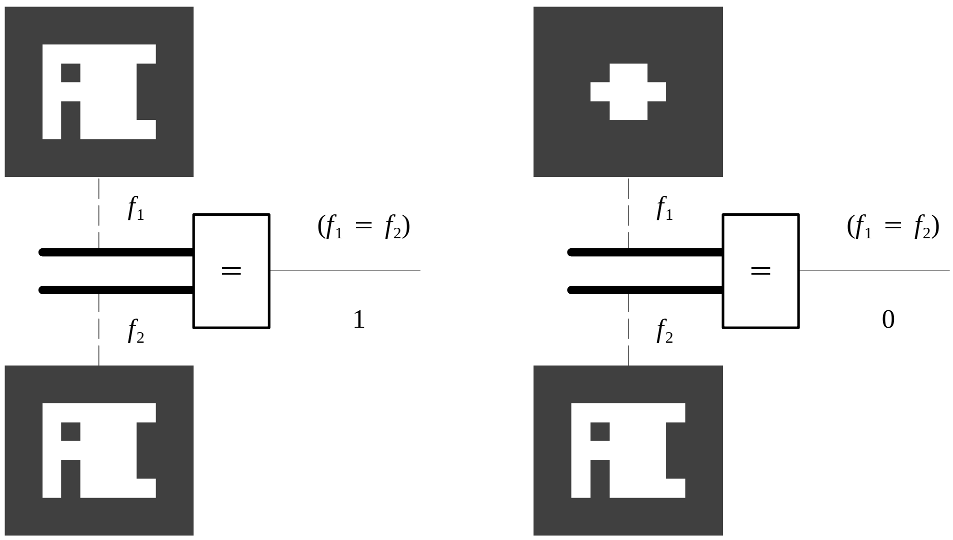

Fig. 2.16 – Relação de igualdade entre funções binárias.

Proposição 2.6 (conjunto parcialmente ordenado das funções binárias) – O conjunto $\{0,1\}^E$ das funções binárias definidas em E, provido da relação "menor que" forma um conjunto parcialmente ordenado, denotado $(\{0,1\}^E, \leq)$. □

Prova – O conjunto $\{0,1\}$ provido da relação $\leq$ definida na Tabela 2.3 é um conjunto parcialmente ordenado. Basta verificar que esta relação satisfaz os três axiomas de uma relação de ordem. Isto é feito nas Tabelas 2.4 – 2.6.

Então, para todo f, g e h em $\{0,1\}^E$ e todo $x \in E$,

$$f(x) \leq f(x)$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ e } g(x) \leq f(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ e } g(x) \leq h(x) \Rightarrow f(x) \leq h(x).$$

Isto é, pela Definição 2.8, a relação "menor que" satisfaz também, por herança, os três axiomas de uma relação de ordem. □

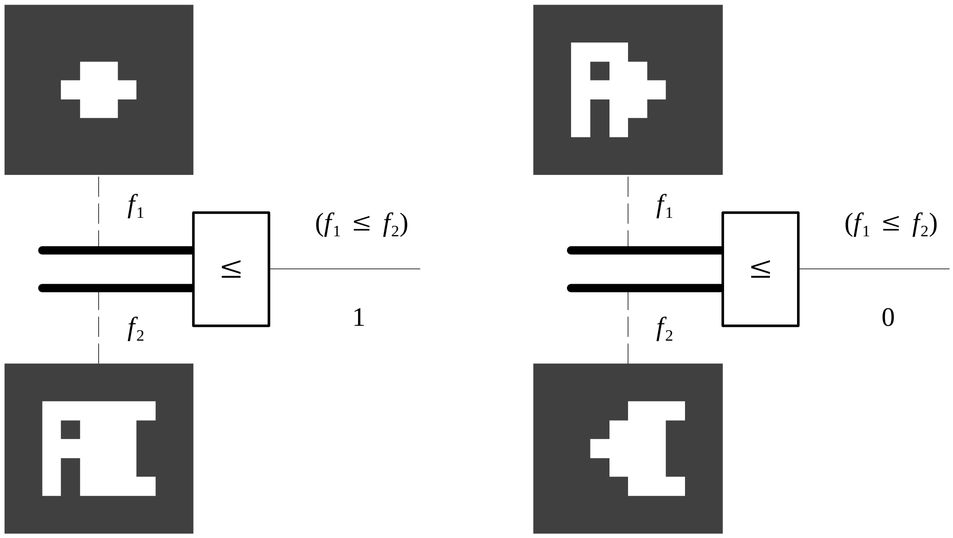

Fig. 2.17 – Relação "menor que" entre funções binárias.

Tabela 2.4 – PROVA DA REFLEXIVIDADE.

a	$a \leq a$
0	1
1	1

Tabela 2.5 – PROVA DA ANTI–SIMETRIA.

a	b	$a \leq b$	$b \leq a$	$a \leq b$ e $b \leq a$	$a = b$	$a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Tabela 2.6 – PROVA DA TRANSITIVIDADE.

a	b	c	$a \le b$	$b \le c$	$a \le b$ e $b \le c$	$a \le c$	$a \le b$ e $b \le c \Rightarrow a \le c$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Proposição 2.7 (consistência entre álgebra de Boole e conjunto parcialmente ordenado) – Para todo f e g em $\{0,1\}^E$, as seguintes proposições são equivalentes

(1) $f \le g$

(2) $f \vee g = g$

(3) $f \wedge g = f$

(4) $(\sim f) \vee g = \mathit{1}$

(5) $f \wedge (\sim g) = \mathit{0}$

(6) $f \sim g = \mathit{0}$. $\square$

Prova – Vamos provar que (1) e (2) são equivalentes. Na Tabela 2.7 prova–se que, para todo a e b em $\{0,1\}$, $a \le b \Leftrightarrow a \vee b = b$. Então, para todo f e g em $\{0,1\}^E$ e todo $x \in E$,

$$f(x) \le g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g(x) = g(x).$$

Isto é, pelas Definições 2.2 e 2.8, para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$$f \le g \Leftrightarrow f \vee g = g.$$

Vamos provar que (2) e (3) são equivalentes. Supondo que $f \vee g = g$, para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$$\begin{aligned} f &= f \wedge (f \vee g) && \text{(absorção)} \\ &= f \wedge g, && \text{(hipótese } f \vee g = g\text{)} \end{aligned}$$

isto é, $f \vee g = g \Rightarrow f \wedge g = f$.

Supondo que $f \wedge g = f$, para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$$\begin{aligned} g &= (f \wedge g) \vee g && \text{(absorção)} \\ &= f \vee g, && \text{(hipótese } f \wedge g = f\text{)} \end{aligned}$$

isto é, $f \vee g = g \Leftarrow f \wedge g = f$.

Vamos provar que (3) e (4) são equivalentes. Supondo que $f \wedge g = f$, para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$$\begin{aligned} \mathit{1} &= (\sim f) \vee f && \text{(complementaridade)} \\ &= (\sim f) \vee (f \wedge g) && \text{(hipótese } f \wedge g = f\text{)} \end{aligned}$$

$= ((\sim f) \vee f) \wedge ((\sim f) \vee g)$ (distributividade)
$= 1 \wedge ((\sim f) \vee g)$ (complementaridade)
$= (\sim f) \vee g,$ (identidade)

isto é, $f \wedge g = f \Rightarrow (\sim f) \vee g = 1$.

Supondo que $(\sim f) \vee g = 1$, para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$f = f \wedge 1$ (identidade)
$= f \wedge ((\sim f) \vee g)$ (hipótese $(\sim f) \vee g = 1$)
$= (f \wedge (\sim f)) \vee (f \wedge g)$ (distributividade)
$= 0 \vee (f \wedge g)$ (complementaridade)
$= f \wedge g,$ (identidade)

isto é, $f \wedge g = f \Leftarrow (\sim f) \vee g = 1$.

A prova da equivalência entre (2) e (5) é similar a prova anterior.

Finalmente a prova da equivalência entre (5) e (6) decorre da Definição 2.5. □

Tabela 2.7 – PROVA DA CONSISTÊNCIA.

a	b	$a \leq b$	$a \vee b$	$a \vee b = b$	$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Exercício 2.3 (conservação da relação de ordem) – Usando a Proposição 2.7, mostre uma das duas propriedades abaixo. Para todo f, g e h em $\{0,1\}^E$,

$f \leq g \Rightarrow f \vee h \leq g \vee h$
$f \leq g \Rightarrow f \wedge h \leq g \wedge h$. □

Exercício 2.4 (involução e leis de Morgan) – Usando a Proposição 2.7 e os axiomas apropriados de álgebra de Boole e de relação de ordem, mostre uma das duas propriedades abaixo. Para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$\sim \sim f = f$ (*involução*)
$\sim (f \vee g) = (\sim f) \wedge (\sim g)$ e $\sim (f \wedge g) = (\sim f) \vee (\sim g)$ (*lei de Morgan*)
□

Exercício 2.5 (antitonia) – Usando a Proposição 2.7, mostre que, para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$f \leq g \Leftrightarrow (\sim g) \leq (\sim f)$. (*antitonia*)
□

Pela Proposição 2.7 e pela definição de união de uma função binária, temos uma definição equivalente para a relação "menor que" ($\leq$) entre funções binárias: para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$$f \leq g \Leftrightarrow \bigvee_{x \in E} (f \sim g)(x) = 0.$$

Adotando a convenção que 1 significa que a relação "menor que" ($\leq$) é "*verdadeira*" e 0 que ela é "*falsa*", a expressão acima é equivalente à expressão abaixo

$$(f \leq g) = \sim \bigvee_{x \in E} (f \sim g)(x).$$

A Figura 2.18 ilustra o algoritmo para testar se duas funções binárias são comparáveis. Este algoritmo é derivado da igualdade acima.

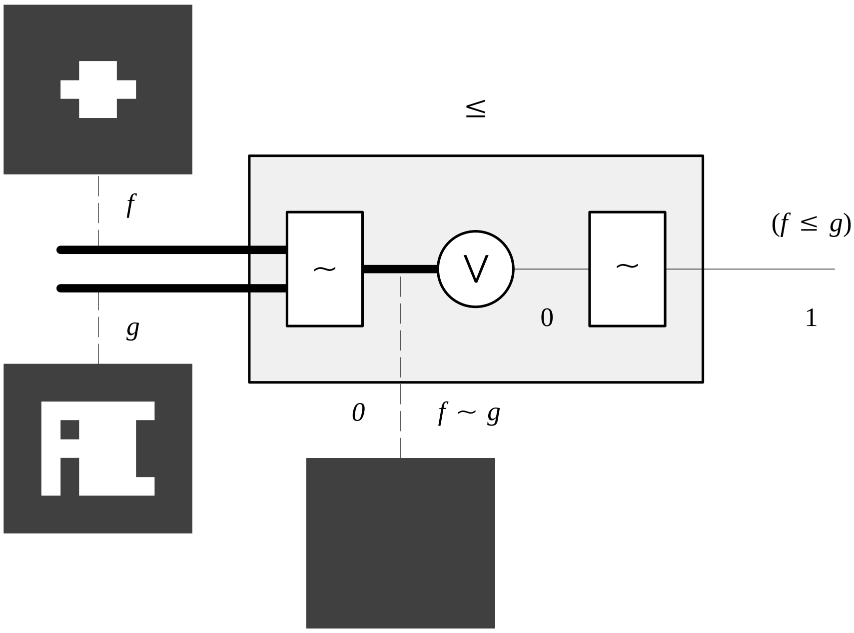

Fig. 2.18 – Algoritmo de teste de comparabilidade entre funções binárias.

Finalmente, usando as propriedades de reflexividade e de anti–simetria da relação "menor que" ($\leq$), temos uma definição equivalente para a relação de igualdade ($=$) entre funções binárias: para todo f e g em $\{0,1\}^E$,

$$f = g \Leftrightarrow f \leq g \text{ e } g \leq f.$$

Adotando a mesma convenção (1 para "*verdadeiro*" e 0 para "*falso*"), a expressão acima é equivalente a expressão abaixo

$$(f = g) = (f \leq g) \wedge (g \leq f).$$

A Figura 2.19 ilustra o algoritmo para testar se duas funções binárias são iguais. Este algoritmo é derivado da igualdade acima.

Exercício 2.6 (propriedade da união e da interseção de uma família de funções binárias) – Seja (f_i) uma família de funções binárias de $\{0,1\}^E$, com índices em I. Usando as Proposições 2.4 e 2.7, prove que, para todo $k \in I$,

$$f_k \leq \bigvee_{i \in I} f_i \quad \text{e} \quad \bigwedge_{i \in I} f_i \leq f_k\,. \qquad \square$$

Vamos agora introduzir uma estrutura algébrica, extremamente importante em Morfologia Matemática, a de reticulado completo, intoduzida por G. Birkhoff em 1933.

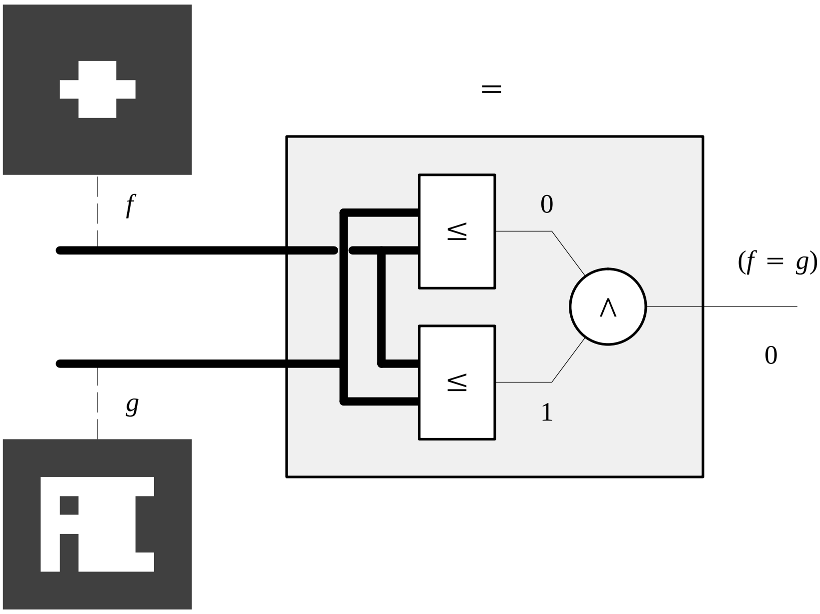

Fig. 2.19 – Algoritmo de teste de igualdade entre funções binárias.

Seja $\mathcal{X}$ uma subcoleção não vazia de $\mathcal{P}(E)$ e A um elemento de $\mathcal{P}(E)$. O elemento A é um *limitante superior* (l.s.) *de* $\mathcal{X}$ (*em* $\mathcal{P}(E)$) se e somente se $A \in \mathcal{P}(E)$ e $X \subset A$ para todo $X \in \mathcal{X}$. O elemento A é um *limitante inferior* (l.i.) *de* $\mathcal{X}$ (*em* $\mathcal{P}(E)$) se e somente se $A \in \mathcal{P}(E)$ e $A \subset X$ para todo $X \in \mathcal{X}$.

Por exemplo, para qualquer subcoleção de $\mathcal{P}(E)$, E é um limitante superior e $\emptyset$ é um limitante inferior.

Se $\mathcal{X}$ for vazio, então qualquer elemento de $\mathcal{P}(E)$ (inclusive o subconjunto vazio) é um limitante superior e inferior de $\mathcal{X}$.

A Figura 2.20 (resp. 2.21) mostra, através de um diagrama de Venn, um subconjunto A que é um limitante superior (resp. inferior) da subcoleção $\mathcal{X}$ contendo os subconjuntos X_1 e X_2.

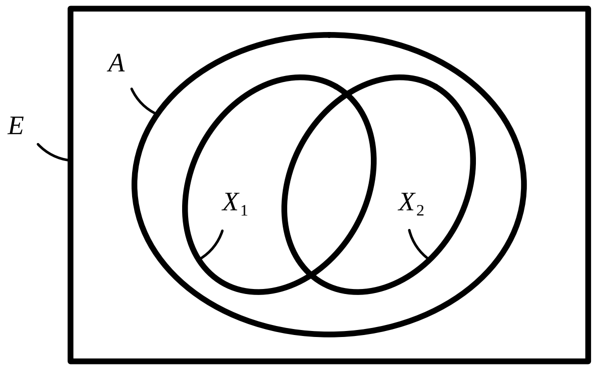

Fig. 2.20 – Limitante superior de dois subconjuntos.

Pela anti–simetria da inclusão, existe no máximo (mas pode não existir) um limitante superior (resp. inferior) de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$. Quando este limitante superior (resp. inferior) existir ele é chamado de *maior* (resp. *menor*) *elemento de* $\mathcal{X}$.

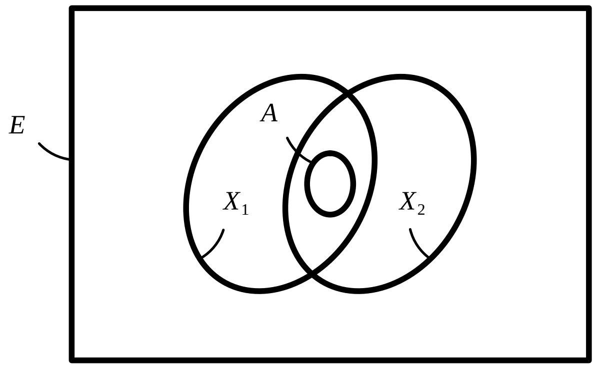

Fig. 2.21 – Limitante inferior de dois subconjuntos.

A subcoleção $\mathcal{X}$ contendo os subconjuntos X_1 e X_2 das Figuras 2.20 e 2.21 não possui nem maior nem menor elemento. A coleção $\mathcal{P}(E)$ possue um maior elemento que é E e um menor elemento que é $\emptyset$.

Seja X um elemento de uma subcoleção $\mathcal{X}$. Se Y é o maior elemento de $\mathcal{X}$, então $Y \subset X$ implica que $Y = X$ (pois, pela definição de maior elemento, $X \in \mathcal{X} \Rightarrow X \subset Y$). Se Y é o menor elemento de $\mathcal{X}$, então $X \subset Y$ implica que $Y = X$ (pois, pela definição de menor elemento, $X \in \mathcal{X} \Rightarrow Y \subset X$).

Com todos os ingredientes acima, podemos agora introduzir dois conceitos de destaque que servirão na definição de reticulado completo.

O *supremo de* $\mathcal{X}$ (*em* $\mathcal{P}(E)$), denotado $\sup\mathcal{X}$, é, se existir, o menor dos limitantes superiores de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{P}(E)$. Em outros termos, para todo Y em $\mathcal{P}(E)$

$$Y \text{ l.s. de } \mathcal{X} \Leftrightarrow \sup\mathcal{X} \subset Y.$$

O *ínfimo de* $\mathcal{X}$ (*em* $\mathcal{P}(E)$), denotado $\inf\mathcal{X}$, é, se existir, o maior dos limitantes inferiores de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{P}(E)$. Em outros termos, para todo Y em $\mathcal{P}(E)$

$$Y \text{ l.i. de } \mathcal{X} \Leftrightarrow Y \subset \inf\mathcal{X}.$$

O supremo de $\emptyset$ é o menor elemento de $\mathcal{P}(E)$, isto é, $\emptyset$. O ínfimo de $\emptyset$ é o maior elemento de $\mathcal{P}(E)$, isto é, E. Em outros termos, $\sup\emptyset = \emptyset$ e $\inf\emptyset = E$.

No caso de $\mathcal{X}$ ser a subcoleção contendo dois subconjuntos X_1 e X_2 o supremo de $\mathcal{X}$ é o subconjunto $X_1 \cup X_2$ e o ínfimo é o subconjunto $X_1 \cap X_2$.

Exercício 2.7 (propriedade do maior e do menor elemento de um conjunto) – Mostre que, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(E)$ e $A \in \mathcal{P}(E)$, A é o maior (resp. menor) elemento de $\mathcal{X}$ se e somente se $A = \sup\mathcal{X}$ (resp. $A = \inf\mathcal{X}$) e $A \in \mathcal{X}$. □

Exercício 2.8 (propriedade do supremo e do ínfimo) – Mostre que, para todas subcoleções $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ de $\mathcal{P}(E)$,

$$\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \Rightarrow \sup\mathcal{X}_1 \subset \sup\mathcal{X}_2 \quad \text{e} \quad \inf\mathcal{X}_2 \subset \inf\mathcal{X}_1\,.$$ □

O conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(E), \subset)$ provido das operações habituais de união e interseção, estendidas às famílias em $\mathcal{P}(E)$, forma um *reticulado completo*. Em outros termos, para todo conjunto de indices I, estas operações verificam os dois axiomas abaixo [Szász71, p. 50].

Para toda família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de E,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \sup \mathcal{A}_I \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \inf \mathcal{A}_I \,,$$

onde $\mathcal{A}_I$ é a imagem de I através da família $(A_i)_{i \in I}$, isto é,

$$\mathcal{A}_I = \{A \in \mathcal{P}(E) : \exists i \in I,\ A_i = A\}.$$

De uma maneira equivalente, podemos dizer que o conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(E), \subset)$ é um reticulado completo porque toda subcoleção de $\mathcal{P}(E)$ possue um supremo e um ínfimo.

O conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(E), \subset)$ possue um maior elemento que é E e um menor elemento que é $\emptyset$.

Proposição 2.8 (reticulado das funções binárias) – O conjunto parcialmente ordenado $(\{0,1\}^E, \leq)$ das funções binárias definidas em E, provido das operações de união e interseção, forma um reticulado completo. Em outros termos, para todo conjunto de indices I, estas operações verificam os dois axiomas abaixo.

Para toda família $(f_i)_{i \in I}$ de funções binárias em $\{0,1\}^E$,

$$\bigvee_{i \in I} f_i = \sup \mathcal{F}_I \quad \text{e} \quad \bigwedge_{i \in I} f_i = \inf \mathcal{F}_I,$$

onde $\mathcal{F}_I$ é a imagem de I através a família $(f_i)_{i \in I}$, isto é,

$$\mathcal{F}_I = \{f \in \mathcal{P}(E) : \exists i \in I,\ f_i = f\}.$$

De uma maneira equivalente, o conjunto parcialmente ordenado $(\{0,1\}^E, \leq)$ é um reticulado completo porque todo subconjunto de $\{0,1\}^E$ possue um supremo e um ínfimo. □

Prova – Seja (f_i) uma família de funções binárias em $\{0,1\}^E$ com índices em I. Para todo $g \in \{0,1\}^E$, em primeiro lugar,

$$\begin{aligned}
g \text{ l.s. de } \mathcal{F}_I &\Leftrightarrow \forall i \in I,\ f_i \leq g && \text{(definição de l.s. e de } \mathcal{F}_I) \\
&\Rightarrow \bigvee_{i \in I} f_i = \bigvee_{i \in I} (f_i \wedge g) && \text{(Proposição 2.7)} \\
&\Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} f_i = (\bigvee_{i \in I} f_i) \wedge g && \text{(Proposição 2.5)} \\
&\Leftrightarrow (\bigvee_{i \in I} f_i) \leq g; && \text{(Proposição 2.7)}
\end{aligned}$$

em segundo lugar,

$$\begin{aligned}
(\bigvee_{i \in I} f_i) \leq g &\Rightarrow \forall i \in I,\ f_i \leq g. && \text{(Exercício 2.6 e transitividade de } \leq) \\
&\Leftrightarrow g \text{ l.s. de } \mathcal{F}_I. && \text{(definição de l.s. e de } \mathcal{F}_I)
\end{aligned}$$

Pela definição de supremo, isto prova que, para toda família $(f_i)_{i \in I}$ de funções binárias em $\{0,1\}^E$,

$$\bigvee_{i \in I} f_i = \sup \mathcal{F}_I.$$

Usando o raciocínio acima, prova–se também que, para toda família $(f_i)_{i \in I}$ de funções binárias em $\{0, 1\}^E$,

$$\bigwedge_{i \in I} f_i = \inf \mathcal{F}_I. \qquad \square$$

O conjunto parcialmente ordenado $(\{0, 1\}^E, \leq)$ possue um maior elemento que é $\mathit{1} : x \mapsto 1$ e um menor elemento que é $\mathit{0} : x \mapsto 0$.

Pela Proposição 2.8, para todo f_1 e f_2 em $\{0, 1\}^E$, distintos,

$$f_1 \vee f_2 = \sup\{f_1, f_2\} \quad \text{e} \quad f_1 \wedge f_2 = \inf\{f_1, f_2\}.$$

Exercício 2.9 (comparação entre a união e a interseção de duas funções binárias) – Usando o resultado acima e a definição de supremo e ínfimo, mostre que $f_1 \wedge f_2 \leq f_1 \vee f_2$. □

Proposição 2.9 (isomorfismo de reticulados) – O reticulado dos subconjuntos de E e o reticulado das funções binárias definidas em E, são isomorfos. Em outros termos, $X \mapsto \mathit{1}_X$ é um isomorfismo de reticulado, isto é (pelo Lema 2 em [Birkho67, p. 24]), $X \mapsto \mathit{1}_X$ é uma bijeção e para todo A e B em $\mathcal{P}(E)$,

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathit{1}_A \leq \mathit{1}_B . \qquad (\textit{isotonia dupla})$$

□

Prova – Pela Proposição 2.1, $X \mapsto \mathit{1}_X$ é uma bijeção. Basta, então, verificar a isotonia dupla. Para todo A e B em $\mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned}
A \subset B &\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \ (x \in E)) && (\text{definição de } \subset) \\
&\Leftrightarrow (\mathit{1}_A(x) = 1 \Rightarrow \mathit{1}_B(x) = 1 \ (x \in E)) && (\text{definição de } \mathit{1}_A \text{ e } \mathit{1}_B) \\
&\Leftrightarrow (\mathit{1}_A(x) \leq \mathit{1}_B(x) \ (x \in E)) && (\text{definição de } \leq \text{ em } \{0, 1\}) \\
&\Leftrightarrow \mathit{1}_A \leq \mathit{1}_B && (\text{definição de } \leq \text{ em } \{0, 1\}^E)
\end{aligned}$$

□

Uma consequência da Proposição 2.9 é que as operações de união e interseção (estendidas) comutam com o mapeamento $X \mapsto \mathit{1}_X$, isto é, para toda família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de E,

$$\mathit{1}_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigvee_{i \in I} \mathit{1}_{A_i} \quad \text{e} \quad \mathit{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigwedge_{i \in I} \mathit{1}_{A_i}$$

Como consequência da Proposição 2.9, temos também, para todo f e g em $\{0, 1\}^E$,

$$f \leq g \Leftrightarrow \text{suporte}(f) \subset \text{suporte}(g). \qquad (\text{isotonia dupla})$$

A Proposição 2.9 indica que a comparação pode ser efetuada indiferentemente no domínio dos subconjuntos ou das funções binárias.