

**SIBGRAPI'92**

**V SIMPÓSIO BRASILEIRO  
DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA E  
PROCESSAMENTO DE IMAGENS**

---

Águas de Lindóia, SP, 9 a 12 de novembro de 1992 – Hotel Majestic

---

*Adendo  
aos  
Anais*

**SIBGRAPI'92**

**V SIMPÓSIO BRASILEIRO DE COMPUTAÇÃO  
GRÁFICA E PROCESSAMENTO DE IMAGENS**

**OVERVIEW  
ON  
MATHEMATICAL MORPHOLOGY**

*Jean Paul Frédéric Serra*  
(ENSMP/CMM, França)  
*Gerald Jean Francis Banon*  
(INPE/DPI, Brasil)  
*Junior Barrera*  
(USP/IME, Brasil)

*Edição e Diagramação:*  
*Guilherme Henrique de Aguiar*

## Overview on Mathematical Morphology

JEAN PAUL FRÉDÉRIC SERRA<sup>1</sup>  
GERALD JEAN FRANCIS BANON<sup>2</sup>  
JUNIOR BARRERA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>CMM/ENSMP–Centre de Morphologie Mathématique / École Nationale Supérieure des Mines de Paris  
35, rue Saint-Honoré  
77300 Fontainebleau, France

<sup>2</sup>DPI/INPE–Divisão de Processamento de Imagens / Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
Caixa Postal 515  
12201-970 São José dos Campos, SP, Brazil  
banon@dpi.inpe.br

<sup>3</sup>IME/USP–Instituto de Matemática e Estatística / Universidade de São Paulo  
Caixa Posta IME 20570  
01498-970 São Paulo, SP, Brazil  
jb@ime.usp.br

**Abstract.** In this tutorial, the following topics will be presented: introduction to Mathematical Morphology; morphological filtering; residues; image segmentation; translation invariant set mapping representations.

### Motivation

Mathematical Morphology is a unique methodology for image analysis. It provides a means for describing not only binary, grey level and color images but also any transformation between such images.

Mathematical Morphology is useful to enhance the images, to recognize their patterns and to help understand their geometrical structure. Moreover, any algorithm for information extraction or segmentation

of images can be described in terms of the elementary transformations of the Mathematical Morphology: dilation and erosion.

For that reason, Mathematical Morphology has important applications in many fields such as metallography, medicine, biology, cytology, automation, computer vision, remote sensing, cartography, etc.

### Description

In this tutorial, the following topics will be presented:

- introduction to Mathematical Morphology (erosions and dilations);
- morphological filtering (openings and closings);
- residues (gradient, top hat, last erosion, skeleton, conditional bisectrix, hit and miss, thinning, thickening, skiz);
- Image segmentation (binary segmentation, wa-

tershed, examples: electrophoretic gels, holographic images, ground layout extraction, road extraction);

- translation invariant set mapping representations (kernel definition, sup-generating and inf-generating mappings, dual representation, minimal representations, examples).

### Acknowledgments

The edition of this document was supported by FAPESP (“Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo”) under contract no. 91/3532-2, the partici-

pation of Professor J. Serra in the presentation of this tutorial was supported by FAPESP under contract no. 92/2760-4.

### Bibliography

G. J. F. Banon and J. Barrera, “Morphological filtering for stripping correction of SPOT images,” *Photogrammetria (PRS)*, vol. 43, pp. 195–205, 1989.

G. J. F. Banon and J. Barrera, “Set mapping decompositions by mathematical morphology,” chapter to be included in a book entitled “Mathematical Morphology: Theory and Hardware,” to be edited by R. M. Haralick, 1990.

- G. J. F. Banon and J. Barrera, "Minimal representations for translation invariant set mappings by mathematical morphology," *SLAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 51, no. 6, pp. 1782-1798, Dec. 1991.
- G. J. F. Banon and J. Barrera, "Decomposition of mappings between complete lattices by Mathematical Morphology. Part I: General lattices," to be published in vol. 30, no. 3, of *Signal Processing*, 1993.
- J. Barrera "Uma abordagem unificada para problemas de visão computacional: a Morfologia Matemática," Ph.D dissertation, SP, Department of Electronic Eng., Politech. School of USP, Apr. 1992.
- J. Barrera and G. Banon "Expressiveness of the morphological language," *Image Algebra and Morphological Image Processing III*, SPIE's 1992 International Symposium on Optical Applied Science and Engineering, SPIE Proceedings vol. 1769, pp. 264-275, San Diego, 20-22 July 1992.
- F. Meyer and S. Beucher "Morphological Segmentation," *Journal of visual communication and image representation*, vol. 1, no. 1, pp.21-46, Sep. 1990.
- J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 1*, Academic Press, London, 1982.
- J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2: Theoretical Advances*, Academic Press, London, 1988.
- J. Serra and L. Vincent, "Overview of Morphological filtering," *Circuit Systems and Signal processing*, vol. 2, no. 1, 1992.

---

# Morfología Matemática

---

P. Salembier y J. Serra

Dept. de Teoría de la Señal y Comunicaciones, Universidad  
Politécnica de Cataluña.

Centre de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de  
Paris.

---

---

---

## Plan del Curso

---

- |   |  |
|---|--|
| <p><b>I) Conceptos y nociones básicas:</b></p> <p><b>II) Erosiones y dilataciones:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) Erosión y dilatación de conjuntos</li><li>b) Erosión y dilatación de funciones</li><li>c) Función distancia</li><li>d) Erosión y dilatación geodésica</li></ul> <p><b>III) Filtros morfológicos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) <u>Aperturas y cierres:</u><ul style="list-style-type: none"><li>a.1) Aperturas y cierres morfológicos</li><li>a.2) Aperturas y cierres algebraicos</li><li>a.3) Granulometría</li></ul></li><li>b) <u>Caso general:</u><ul style="list-style-type: none"><li>b.1) Composición de dos primitivas:<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>\theta\psi, \theta\psi\theta, \dots</math></li></ul></li></ul></li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>b.2) Composición de dos familias de primitivas:<ul style="list-style-type: none"><li>• Filtros alternados secuenciales</li></ul></li><li>b.3) Combinación con sup. e inf.:<ul style="list-style-type: none"><li>• Centro morfológico y contraste</li></ul></li></ul> <p><b>IV) Residuos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) <u>Residuos de dos primitivas:</u><ul style="list-style-type: none"><li>• Gradientes</li><li>• "Top hat"</li></ul></li><li>b) <u>Residuos de dos familias:</u><ul style="list-style-type: none"><li>• Erosión última</li><li>• Esqueleto</li><li>• Bisectriz condicional</li></ul></li><li>c) <u>Residuos y Homotopía:</u><ul style="list-style-type: none"><li>• "Hit and miss":</li><li>• "Thinning - Thickening"</li><li>• "Skiz"</li></ul></li></ul> |
|---|--|
- 
-

## Conceptos y Nociones básicas

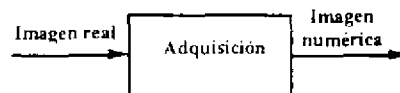
### Procesado de Imágenes (I)

=> El Procesado de Imagen puede dividirse en tres grandes tipos de problemas: Codificación, Extracción de Características y Segmentación

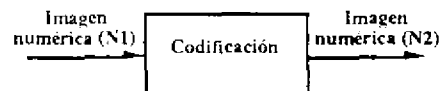
1) **Codificación:**

La codificación incluye todos los temas de representación de imágenes. Se trata en particular de:

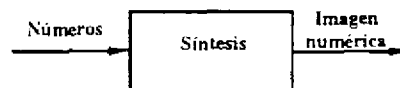
Adquisición: Transformación de una imagen real en números.



Compresión: Modificación de la representación de la imagen.



Síntesis: Creación de una imagen a partir de una representación más simbólica.



## Procesado de Imágenes (II)

### 2) Extracción de Características:

El objetivo es mejorar la calidad de una imagen o poner en evidencia algunas características de la imagen. Este punto incluye la extracción de parámetros y la restauración de imágenes con ruido o con defectos.



### 3) Segmentación:

La segmentación consiste en conseguir una representación simbólica de la imagen. Es decir, definir un mapa de la imagen que describa las regiones homogéneas según un criterio.



## Cuatro enfoques en procesado de imagen

Espacio geométrico	Espacio abstracto
<p><b>Lineal:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Procesado de señal</li> <li>• Convolución, Análisis de Fourier</li> <li>• Tomografía</li> <li>• Kriging, Splines</li> </ul>	<p><b>Estadístico:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Análisis multivariado</li> <li>• Taxonomía</li> <li>• Estereología</li> </ul>
<p><b>Morfológico:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Filtrado</li> <li>• Distribución de tamaño</li> <li>• Conjuntos aleatorios</li> <li>• Cuencas (watershed)</li> </ul>	<p><b>Sintáctico:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Extracción de primitivas</li> <li>• Gramáticas</li> </ul>

---

## Definición de la Morfología Matemática

### Matemática

Análisis funcional sobre los retículos.

Modelos topológico-probabilísticos

### Física

Método de análisis de señal, basado en la teoría de los conjuntos a fin de encontrar relaciones entre propiedades físicas y estructuras.

### Procesado de señal

Técnicas no lineales de procesado de señal basadas en operaciones de mínimo y máximo.

### Ingeniería

Algoritmos y programas que permiten realizar, de manera sistemática, programas de procesado de señal.

---

---

## Estructuras básicas

### Procesado de señal lineal:

La estructura fundamental en procesado lineal es el *espacio vectorial*:

- conjuntos de vectores  $\mathcal{V}$
- conjunto de escalares  $\mathcal{K}$
- $\mathcal{V}$  con la operación de adición es un grupo conmutativo
- $\mathcal{K}$  cuerpo
- existe una ley de multiplicación estable entre escalar y vector.

### Morfología matemática:

La estructura fundamental es el *retículo completo*:

- conjuntos  $\mathcal{P}$  tales que:
    - 1) Existe una relación de orden parcial
    - 2) Para todas las familias de elementos  $\{X_i\} \in \mathcal{P}$ , existe un sup. y un inf.:
- Inf. : máxima cota inferior  $\wedge \{X_i\}$   
Sup. : mínima cota superior  $\vee \{X_i\}$
- 
-



## Ejemplos de retículos

### Retículo de las partes $P(E)$ de un conjunto $E$ :

El orden está definido por la relación de inclusión:

Sup:  $\cup$   
 Inf:  $\cap$   
 Orden parcial



### Retículos de los reales o enteros:

El orden es el orden de los niveles:

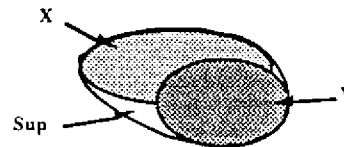
Sup:  $\vee$  (sentido usual)  
 Inf:  $\wedge$   
 Orden total



### Retículo de los conjuntos convexos:

El orden está definido por la relación de inclusión:

Sup : Envolverte convexa  
 Inf : inclusión



## Fundamento de la Morfología

### Procesado lineal:

=> La estructura de trabajo es un espacio vectorial, y la ley fundamental es la adición:

- Se utilizan operaciones que conservan la estructura de trabajo y que conmutan con la ley:

$$\varphi\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \varphi(X_i)$$

La operación resultante es la **convolución**

### Morfología matemática:

=> La estructura de trabajo es un retículo (orden), y las leyes fundamentales son el sup. y el inf.:

- Se utilizan operaciones que conservan la estructura (el orden) y que conmutan con una de las leyes:

Preservación del orden:  $X < Y \Rightarrow \varphi(X) < \varphi(Y)$   
 => **Operadores crecientes**

Comutación con Sup.:  $\varphi\left(\bigvee_i X_i\right) = \bigvee_i \varphi(X_i)$   
 => **Dilatación**

Comutación con Inf.:  $\varphi\left(\bigwedge_i X_i\right) = \bigwedge_i \varphi(X_i)$   
 => **Erosión**

## Noción de dualidad

Con la estructura de retículo, se han definidos dos leyes, Sup. e Inf., que tienen un papel simétrico. Cada involución (c):  $X \rightarrow X^c \rightarrow (X^c)^c = X$  que permuta sup. e inf. genera una dualidad.

**Definición:** Dos operadores  $\psi$  y  $\phi$  son duales respecto a la involución (c) si:

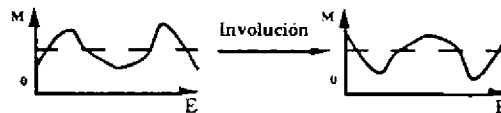
$$\forall X, \psi(X^c) = \phi(X)^c$$

### Ejemplos de involución:

**Retículo de las partes de un conjunto:** La involución es el complementario: la noción clásica de primer y segundo plano:



**Retículo de las funciones reales entre  $[0, M]$ :** La involución es la simetría respecto a  $M/2$ .



## Autodualidad

### Procesado lineal:

- La operación de convolución es autodual, es decir dual de sí mismo:  
 $f * (-g) = -(f * g)$
- Esto significa que las componentes blancas y negras se tratan siempre de forma simétrica.

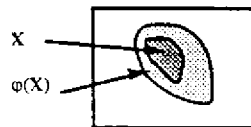
### Morfología:

- La dualidad fundamental entre el sup. y el inf. se transmite a todas las herramientas en morfología.
- En general, las transformaciones van por pares que se corresponden por dualidad, por ejemplo erosión y dilatación, apertura y cierre, "thinning" y "thickening".
- Sin embargo, se pueden encontrar operadores autoduales, por ejemplo la frontera de un conjunto o el centro morfológico.

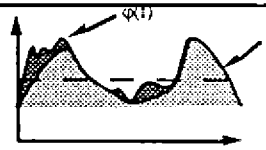
## Comparación entre entrada y salida

**Extensividad, anti-extensividad:** Una transformación es extensiva si su salida es siempre mayor que su entrada. Por dualidad se define la noción de anti-extensividad si la salida es siempre menor que la entrada:

Extensividad:  $\forall X, X \subset \varphi(X)$ ,    Anti-extensividad:  $\forall X, X \supset \varphi(X)$



Conjunto (extensividad)



Función (extensividad)

**Idempotencia:** Una transformación es idempotente si, después de aplicarla, la salida es invariante para esta transformación:

Idempotencia:  $\forall X, \varphi(\varphi(X)) = \varphi(X)$

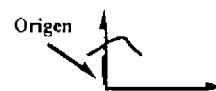
## Invariancia por translación y elemento estructurante

- Muchas transformaciones en morfología estudian la estructura geométrica del retículo de forma local e invariante por translación.
- La dilatación tiene la propiedad de conmutar con la unión. Es decir que la dilatación de un conjunto es igual a la unión de las dilataciones de cada punto del conjunto. En este caso, la invariancia por translación implica que la dilatación se caracteriza a partir de la transformada del origen. El resultado de la dilatación del origen se llama **elemento estructurante**.
- De la misma forma, en el caso de funciones se define una propiedad de invariancia por translación (espacial y vertical) que lleva a la noción de función estructurante.

Ejemplo de elemento estructurante:



conjunto estructurante



función estructurante

## Notaciones

### Traslación:

La operación de translación se escribe de forma simple de la manera siguiente:

Traslación del elemento  $X$  por  $b = \{x+b, x \in X\}$

### Traspuerto:

A veces, se utiliza el elemento traspuerto del elemento estructurante, definido por:

$$X^T = \{-x, x \in X\}$$



Un elemento es simétrico si es igual a su traspuerto.

## Homotecia y transformaciones morfológicas

- A menudo, es necesario modificar la escala de trabajo. Es decir hacer una homotecia espacial  $h_\lambda(X)$ . Se puede distinguir entre dos tipos de transformaciones:

1) Transformaciones que conmutan con la homotecia:

$$\psi(X) = h_{1/\lambda}(\psi(h_\lambda(X)))$$

Ejemplos: Frontera, esqueleto, centro de gravedad.

2) Familias de transformaciones compatibles con la homotecia:

En morfología, se utiliza a menudo transformaciones dependientes de una familia de elementos estructurantes  $B_\lambda = h_\lambda(B)$ . La familia de transformación es en conjunto compatible con la homotecia si:  $h_{1/\lambda}(\psi_B(h_\lambda(X))) = \psi_{h_\lambda(B)}(X) \quad (\neq \psi_B(X))$

=> En este caso, se utilizan dos representaciones muy corrientes:

- Asociar una medida a cada transformación de la familia y obtener una curva dependiente del parámetro  $\lambda$ . Ejemplo: curva granulométrica.
- Considerar la familia de transformaciones como las secciones de una función numérica. Ejemplo: función distancia.

---

- III -

**Erosión y Dilatación**

---

---

---

**Plan de la sección II**

Erosión y dilatación de conjuntos



Erosión y dilatación de funciones

Función distancia

Erosión y dilatación  
geodésicas

---

---

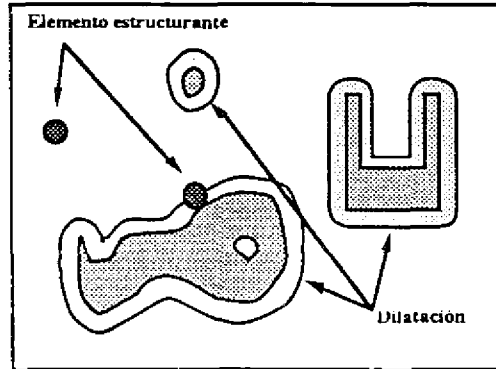
## Dilatación de Conjuntos

**Dilatación de un conjunto X por un elemento estructurante B simétrico:**

La dilatación es el lugar de las posiciones del centro del elemento estructurante B cuando B toca X.

Se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \delta_B(X) &= \{x+b, x \in X, b \in B\} \\ &= \bigcup_{b \in B} (X+b) \end{aligned}$$



Otra notación para la dilatación:  $\delta_B(X) = X \oplus B$

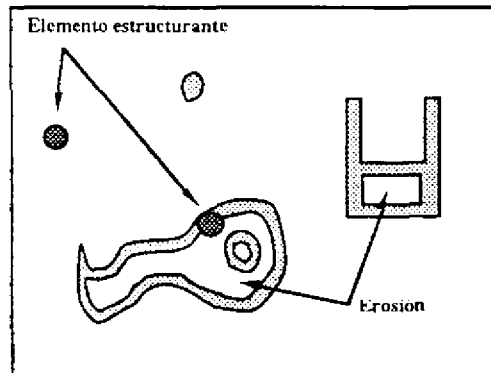
## Erosión de conjuntos

**Erosión de un conjunto X por un elemento estructurante B simétrico:**

La erosión es el lugar de las posiciones del centro del elemento estructurante B cuando B está incluido en X.

Se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \epsilon_B(X) &= \{y, \forall b \in B, y+b \in X\} \\ &= \bigcap_{b \in B} (X-b) \end{aligned}$$



Otra notación para la erosión:  $\epsilon_B(X) = X \ominus B$

## Propiedades de la dilatación y de la erosión (I)

1) Duales:

$$\varepsilon_B(X) = (\delta_B(X^c))^c, \quad \delta_B(X) = (\varepsilon_B(X^c))^c$$

2) Extensividad

$$\text{si } \bar{0} \in B \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_B(X) \subset X \\ X \subset \delta_B(X) \end{cases}$$

La erosión es anti-extensiva  
La dilatación es extensiva

## Propiedades de la erosión y de la dilatación (II)

3) Crecientes:

$$\text{si } X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y) \\ \delta_B(X) \subset \delta_B(Y) \end{cases}$$

4) Conmutación:  
Por definición, la erosión (dilatación) conmuta con la intersección (unión).

$$\varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y)$$

$$\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$$

5) Separabilidad:

$$\varepsilon_{B_1}(\varepsilon_{B_2}(X)) = \varepsilon_A(X), \quad A = \delta_{B_1}(B_2)$$

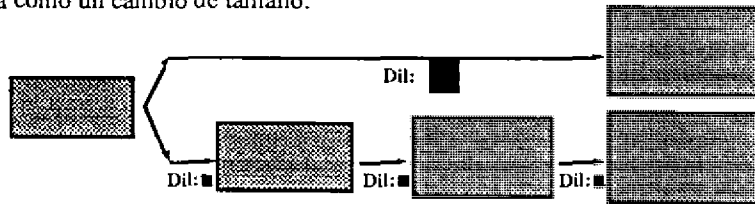
$$\delta_{B_1}(\delta_{B_2}(X)) = \delta_A(X), \quad A = \varepsilon_{B_1}(B_2)$$

Dilatación por = Dilatación por y Dilatación por

## Propiedades de la erosión y la dilatación (III)

**Separabilidad en el caso de elementos estructurantes convexos:**

- Si  $h_\lambda(B)$  representa la homotecia espacial del elemento  $B$ , entonces:  
La ley de absorción siguiente:  
$$\delta_{h_{\lambda \cdot \mu}(B)}(X) = \delta_{h_\lambda(B)}(\delta_{h_\mu(B)}(X))$$
  
se cumple si y sólo si  $B$  es convexo (es decir  $\forall x, y \in B \Rightarrow [x, y] \in B$ )
- En la práctica, la dilatación (erosión) de un conjunto  $X$  por un elemento estructurante  $h_\lambda(B)$  se puede hacer con  $\lambda$  dilataciones (erosiones) con el elemento  $B$ . La iteración actúa como un cambio de tamaño.

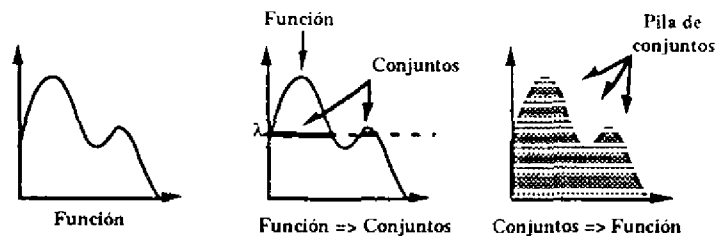


## Equivalencia entre conjuntos y funciones

Una función se puede considerar como un apilamiento de conjuntos decrecientes. Cada conjunto es la intersección entre la función y un plano de nivel constante.

$$X_f(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) \geq \lambda\} \Leftrightarrow f = \int X_f(\lambda) d\lambda$$

Si  $f$  es una función, existe una regla de inclusión:  $\forall \mu < \lambda \in \mathbb{R}, X_f(\lambda) \subset X_f(\mu)$



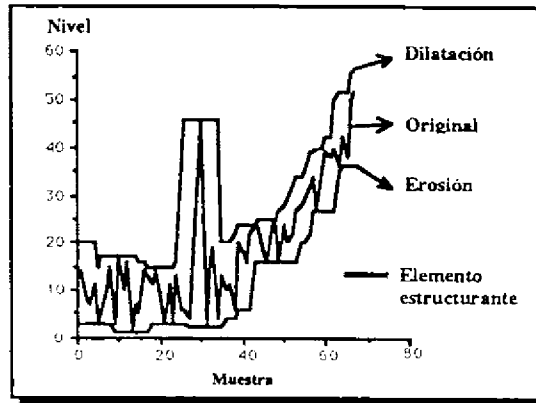


## Dilatación o erosión de una función por un elemento plano

**Definición:** La dilatación o erosión de una función con un elemento estructurante plano se pueden definir como la dilatación o erosión de cada conjunto  $X(\lambda)$  por un conjunto B. Se demuestran las fórmulas siguientes:

$$g(x) = \varepsilon_B(f(x)) = \inf_{y \in B} [f(x+y)]$$

$$g(x) = \delta_B^\tau(f(x)) = \sup_{y \in B} [f(x+y)]$$



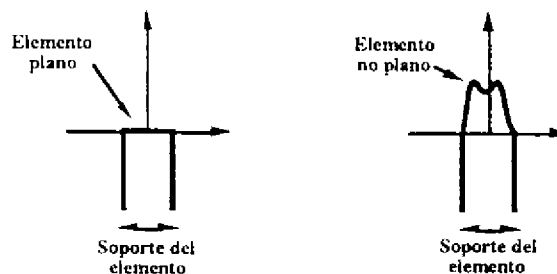
La erosión estrecha los picos positivos. Los picos más estrechos que el elemento estructural desaparecen.

La dilatación ensancha los picos positivos.

Los efectos sobre picos negativos son inversos (La erosión los ensancha, la dilatación los estrecha).

## Elementos estructurantes no planos

- Los elementos planos pueden considerarse como una función de nivel constante e igual a cero con un soporte igual al conjunto. Una generalización de estos elementos planos consiste en introducir una ponderación de los niveles. Se trata entonces de elementos estructurantes no planos.



## Dilatación y erosión de funciones con elementos no planos

### Definición:

Con un elemento estructurante no plano, la dilatación y la erosión están definidas por:

$$g(x) = \epsilon_{h(x)}(f(x)) = \inf_{y \in H} [f(x+y) - h(y)]$$

$$g(x) = \delta_{h(x)}(f(x)) = \sup_{y \in H} [f(x+y) + h(y)]$$

### Nota:

Los valores del elemento estructurante no plano deben tener la misma dimensión que la señal original.

### Comparación con la convolución:

Se puede hacer un paralelismo entre las fórmulas de la dilatación y de la erosión con la convolución.

Convolución / Morfología

Suma  $\Leftrightarrow$  Sup o Inf

Producto  $\Leftrightarrow$  Suma

$$g(x) = \delta_{h(x)}(f(x)) = \sup_{y \in H} [f(x+y) + h(y)]$$

$$g(x) = h(x) * f(x) = \sum_{y \in H} f(y-x) \cdot h(y)$$

$$g(x) = \epsilon_{h(x)}(f(x)) = \inf_{y \in H} [f(x+y) - h(y)]$$

## Propiedades de la dilatación y erosión para funciones

- Las erosiones y dilataciones, con elementos estructurantes planos o no, tienen las mismas propiedades que las enunciadas para los conjuntos.
- La utilización de elementos estructurantes planos respecto a los no planos tiene tres ventajas específicas:

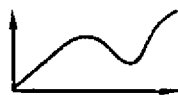
### Commutación con anamorfosis:

Una anamorfosis es una biyección estrictamente monótona de los niveles de la señal.

$$\forall \alpha \text{ anamorfosis y } \forall x_i, F(\alpha(x_i)) = \alpha(F(x_i))$$



anamorfosis



≠ anamorfosis

### Estabilidad:

Una transformación con elemento plano preserva las cotas de una función y preserva el número de bits en caso de señal cuantificada.

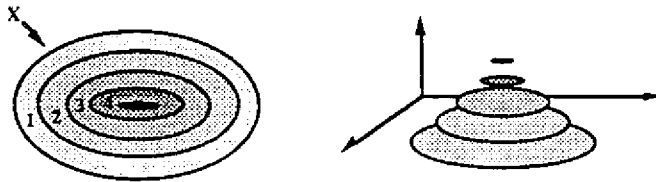
### Implementación:

Una transformación con elemento plano se puede implementar de forma eficiente con técnicas recursivas.

## Función distancia (I)

### Definición:

- La función distancia es un paso intermedio entre los conjuntos y las funciones.
- Cuando se define una distancia sobre el espacio de estudio, se puede asociar a cada conjunto  $X$  su subconjunto  $X_\lambda$  formado por los puntos que están a una distancia mayor que  $\lambda$  de su frontera.



- Cuando  $\lambda$  crece, los subconjuntos están incluidos los unos en los otros (y son paralelos en el caso euclídeo). Se pueden interpretar como las secciones horizontales de una función que tiene como nivel  $\lambda$  en  $x$  si  $x$  está a una distancia  $\lambda$  de la frontera. Esta función se denomina **función distancia**.

## Función distancia (II)

### Propiedades:

- Si la distancia se caracteriza por la serie de discos  $\delta_\lambda$  de tamaño  $\lambda$ , los subconjuntos  $X_\lambda$  son los resultados de las erosiones mediante la familia de discos. Más precisamente:

$$1) \lambda \geq \mu \Rightarrow \delta_\lambda \supset \delta_\mu$$

$$2) \delta_\lambda \delta_\mu \subset \delta_{\lambda+\mu}, \quad \lambda, \mu \geq 0$$

$$3) I = \bigcap \{ \delta_\lambda, \lambda > 0 \}, \quad I: \text{Identidad}$$

- De forma inversa, toda familia de dilataciones simétricas que cumple estas tres propiedades define una distancia  $d$  por la relación:

$$d(x, y) = \text{Inf} \{ \lambda \mid x \in \delta_\lambda(y) \} = \text{Inf} \{ \lambda \mid y \in \delta_\lambda(x) \}$$

$\delta_\lambda(y)$  es la bola de centro  $y$  con radio  $\lambda$ .

## Transformaciones geodésicas

### Enfoque intuitivo:

- En la vida cotidiana, la distancia euclídea de un punto a otro no es muy útil porque no toma en cuenta los obstáculos.
- => En el marco de la morfología, la noción de distancia euclídea se reemplaza a menudo por otra que es la **distancia geodésica**.
- A partir de ella, se puede definir un conjunto de transformaciones geodésicas, en particular la erosión y la dilatación.

## Distancia geodésica

### Definición:

- En el caso de conjuntos, la distancia geodésica se define con referencia a un conjunto  $R$ .

si  $x, y \in R$

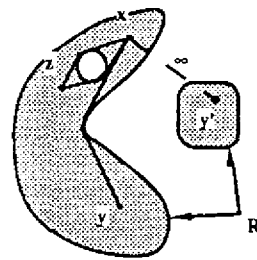
$d_R(x, y) = \text{Inf. de la longitud de los caminos que van de } x \text{ a } y \text{ incluidos en } R.$

si  $x, y \notin R$

$d_R(x, y) = \infty$

### Propiedades:

- 1) Es una distancia generalizada:  
 $d_R(x, y) = d_R(y, x)$   
 $d_R(x, y) = 0 \iff x = y$   
 $d_R(x, z) \leq d_R(x, y) + d_R(y, z)$
- 2) La distancia geodésica siempre es mayor o igual a la euclídea.
- 3) El camino geodésico no es único.

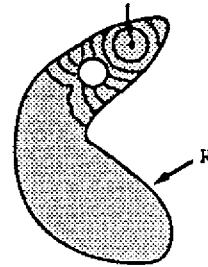


## Bolas geodésicas

- Se trabaja poco con los caminos geodésicos. En cambio contra se utilizan a menudo el concepto de bola geodésica:

$$BR(x,r) = \{y, dR(x,y) \leq r\}$$

- Cuando  $r$  aumenta, las bolas progresan como el frente de una onda emitida por  $x$  dentro del entorno  $R$ .
- Para un tamaño dado  $r$ , las bolas  $BR$  se pueden considerar como un conjunto de elementos estructurantes variables de un punto al otro.



## Dilatación geodésica de conjuntos

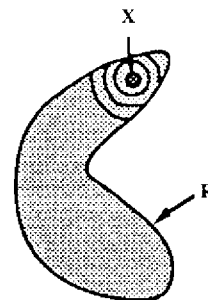
- En el caso digital, la dilatación geodésica unitaria se define como:

$$\delta_R(X) = \delta(X) \cap R$$

- La dilatación de tamaño entero  $n$ , se define por iteraciones:

$$\delta_R^{(n)}(X) = \delta(\dots \delta(\delta(X) \cap R) \cap R \dots) \cap R$$

- Nota: Las dilataciones geodésicas no son invariantes por traslación.



## Erosión geodésica de conjuntos

- La erosión geodésica se define por dualidad respecto a la involución dentro de la referencia:

$$X \rightarrow R \setminus X = R \cap X^c$$

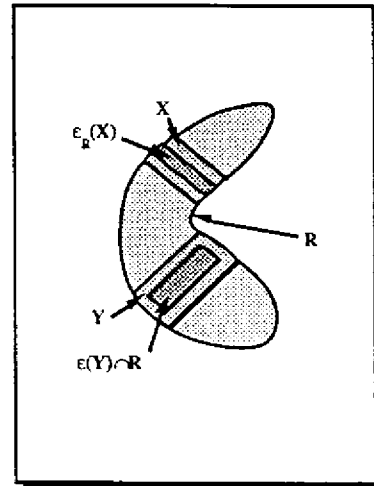
- La erosión geodésica se define como:

$$\varepsilon_R(X) = R \setminus \delta_R(R \setminus X)$$

- Si  $\varepsilon$  denotamos la erosión clásica, tenemos:

$$\varepsilon_R(X) = \varepsilon(X \cup R^c) \cap R$$

(que es diferente de  $\varepsilon(X) \cap R$ )



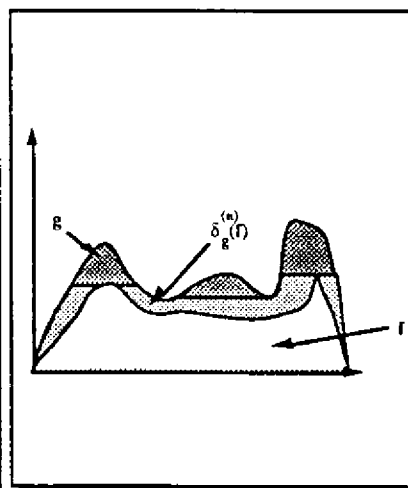
## Erosión y dilatación geodésicas para funciones

- La generalización del concepto de transformaciones geodésicas a funciones es directa. Si  $f$  es una función de  $E$  que toma valores en  $[0, m]$  y  $B$  la bola de tamaño unitario:

$$\delta(f)(x) = \vee \{f(y), y \in B_x\}, \text{ y } \varepsilon(f) = m - \delta(m-f)$$

- La erosión y dilatación geodésicas se definen como:

$$\delta_g(f) = \delta(f) \wedge g, \text{ y } \varepsilon_g(f) = \varepsilon(f \vee (m-g)) \wedge g$$



---

- III -

**Filtros Morfológicos**

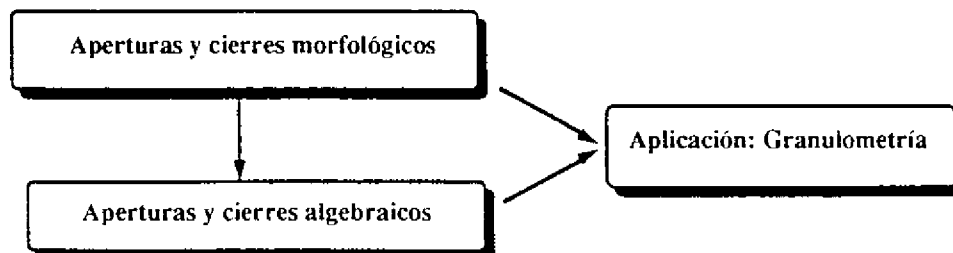
**a: Aperturas y Cierres**

---

---

---

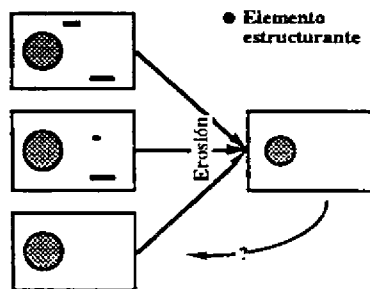
**Plan de la sección III.a**



## Aperturas y cierres morfológicos

### Problema de filtrado inverso:

- En el caso clásico de filtrado lineal, el filtro inverso se caracteriza simplemente como aquél que tiene como función de transferencia la inversa de la función del filtro inicial.
- En el caso de la erosión por ejemplo, el tipo de no linealidad que presenta impide la existencia de un inverso. En efecto, hay muchos elementos que producen el mismo resultado:



Sin embargo, entre todos los "inversos" posibles, hay uno y sólo uno que se obtiene por dilatación dual. Es el más pequeño de todos y se llama apertura morfológica (por dualidad se define un cierre morfológico):

Apertura:  $\gamma_B = \delta_B \epsilon_B^T$ , (se escribe igualmente  $X \circ B$ )

Cierre:  $\phi_B = \epsilon_B \delta_B^T$ , (se escribe igualmente  $X \bullet B$ )

## Propiedades de la apertura y el cierre morfológicos

### Creciente:

La apertura y el cierre son composiciones de funciones crecientes (erosión y dilatación). Por tanto son crecientes. Se puede escribir:

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} \phi(X) \subset \phi(Y) \\ \gamma(X) \subset \gamma(Y) \end{cases}$$

### Extensividad:

Se demuestra que la apertura es anti-extensiva y el cierre extensivo. Si  $I$  denota la identidad:

$$\gamma = \delta \epsilon \leq I \leq \phi = \epsilon \delta$$

### Idempotencia:

La apertura tiene la misma erosión que el conjunto inicial. Esta propiedad implica que la apertura es idempotente (por dualidad el cierre también es idempotente):

$$\epsilon(\delta \epsilon) = \epsilon \Rightarrow \delta \epsilon(\delta \epsilon) = \delta \epsilon \Leftrightarrow \gamma \gamma = \gamma \text{ por dualidad } \phi \phi = \phi$$



## Efecto de la apertura para conjuntos

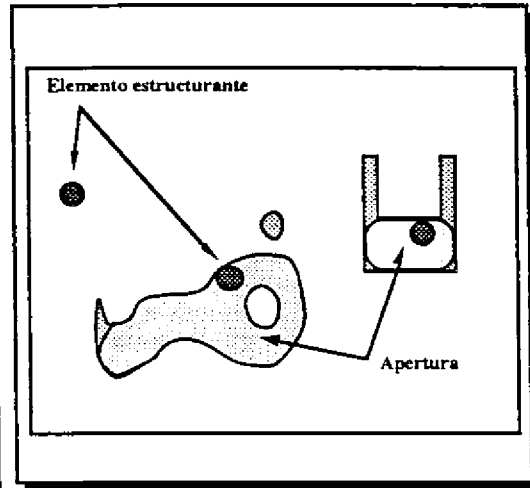
### Descripción exacta:

- La apertura es el espacio descrito por el elemento estructurante B cuando se fuerza a estar incluido en los conjuntos.

### Descripción intuitiva:

#### Con un disco

- La apertura elimina los conjuntos pequeños, las protuberancias estrechas.
- La apertura redondea las convexidades importantes.



## Efecto del cierre para conjuntos

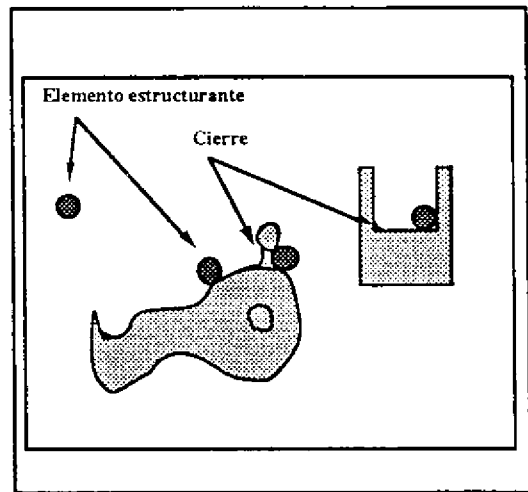
### Descripción exacta:

- El cierre es el complementario del espacio descrito por el elemento estructurante B cuando es forzado a estar fuera de los conjuntos.

### Descripción intuitiva:

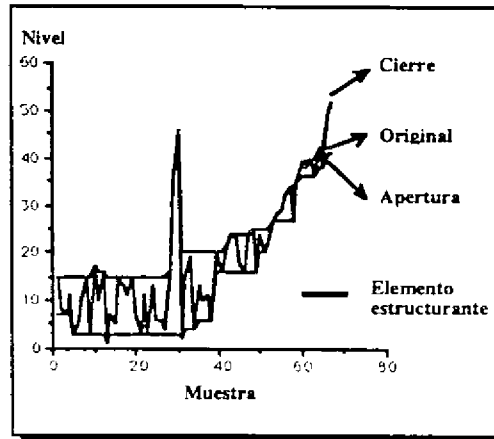
#### Con un disco

- El cierre elimina los agujeros pequeños incluidos en los conjuntos, los canales estrechos.
- El cierre redondea las concavidades importantes.



## Efectos de la apertura y del cierre para funciones

- La apertura y el cierre crean una función más simple que la original. Suavizan de forma no lineal la función.
- La apertura (el cierre) elimina los picos positivos (negativos) que son más estrechos que el elemento estructurante.
- La apertura (el cierre) permanece debajo (encima) de la función original.



## Aperturas y cierres algebraicos

### Definición:

La apertura y el cierre morfológicos tienen tres propiedades fundamentales:

Apertura: ( $\delta \epsilon$ )

- creciente
- anti-extensiva
- idempotente

Cierre: ( $\epsilon \delta$ )

- creciente
- extensivo
- idempotente

En álgebra, cualquier transformación que sea:

- creciente, anti-extensiva e idempotente se denomina apertura (algebraica),
- creciente, extensiva e idempotente se denomina cierre (algebraico)

### Aplicación:

Existen muchas posibilidades de crear aperturas o cierres algebraicos. En la práctica, hay dos muy importantes:

- 1) Hacer varias aperturas (cierres) y coger el sup. de las aperturas (inf. de los cierres).
- 2) Utilizar un proceso de *reconstrucción*.

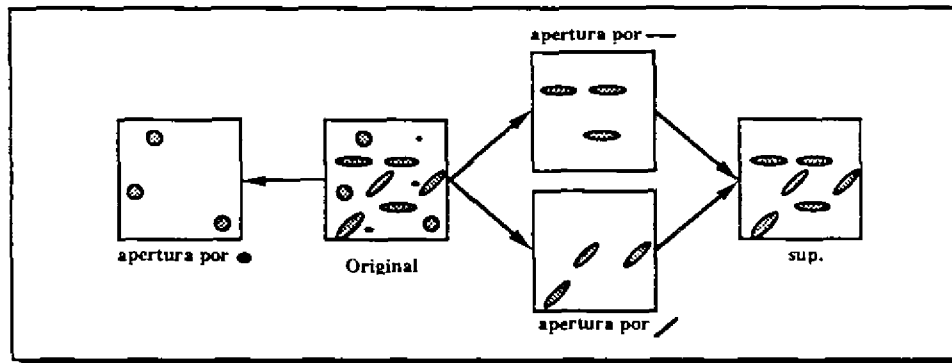
## Sup. de aperturas e inf. de cierres

### Teorema:

- Cualquier sup. de aperturas es una apertura.
- Cualquier inf. de cierres es un cierre.

### Ejemplo de aplicación:

Para tener aperturas con propiedades de selección compleja, se puede hacer varias aperturas morfológicas con diferentes elementos estructurantes y tomar como resultado el sup. de las aperturas.



## Apertura por reconstrucción

### Reconstrucción:

- Si  $R$  denota una referencia y  $X$  un conjunto incluido en  $R$ , la dilatación geodésica de  $X$  dentro de  $R$  de tamaño infinito resulta en las componentes de  $R$  conexas con  $X$ .
- Cambiando de punto de vista, se considera ahora que la operación se aplica a  $R$  para un  $X$  dado. El resultado se llama **apertura por reconstrucción de  $R$** .

$$\text{Apertura: } \gamma^{\text{rec}}(R, X) = \bigcup_n \delta_R^{(n)}(X), \quad \text{Cierre: } \phi^{\text{rec}}(R, X) = \bigcap_n \epsilon_R^{(n)}(X)$$

=> Jugando con la elección de  $X$  y  $R$ , se pueden conseguir varias aperturas. Existen cuatro ejemplos muy útiles en la práctica:

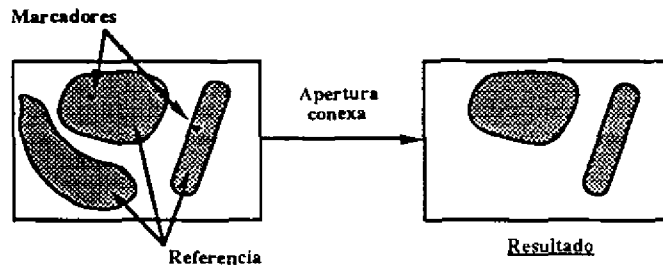
- La *apertura conexas*,
- La *reconstrucción de una función mediante marcadores*,
- La *apertura por reconstrucción de erosión*,
- La *apertura de contraste*.

## Apertura conexa

**Propósito:**

El objetivo de esta apertura es extraer las componentes conexas identificadas por marcadores (puntos que identifican los conjuntos).

- Esta transformación se puede interpretar en términos de reconstrucción:
  - la referencia es la familia de los conjuntos originales y
  - la entrada de la apertura es el conjunto de marcadores.



## Apertura conexa: Comentario teórico

- Cuando el conjunto  $X$  se reduce a un único punto  $\{x\}$ , la apertura por reconstrucción es la componente conexa que contiene  $x$ . Se denomina apertura conexa porque tiene las propiedades siguientes de la noción de conexidad:

$$\gamma^{\text{cc}}(\{x\}, \{x\}) = \{x\}$$

$\gamma^{\text{cc}}(R, \{x\})$  y  $\gamma^{\text{cc}}(R, \{y\})$  son iguales o disjuntos

$$x \in R \Rightarrow \gamma^{\text{cc}}(R, \{x\}) = \emptyset$$

- De forma inversa, cualquier familia de apertura  $\gamma(\cdot, x)$ ,  $x \in E$  que cumpla estas tres propiedades crea una conexidad. Es decir una clase  $\mathcal{C}(E)$  de  $\mathcal{P}(E)$  tal que:

$$\emptyset \in \mathcal{C}, \{x\} \in \mathcal{C} \quad \forall x \in E$$

$$\{C_i\}, C_i \in \mathcal{C}, C_i \cap C_j \neq \emptyset, \cup C_i \in \mathcal{C}$$

- La extensión de esta noción a funciones introduce el concepto de "funciones conexas", es decir funciones con todas sus secciones conexas.

## Reconstrucción de funciones con marcadores

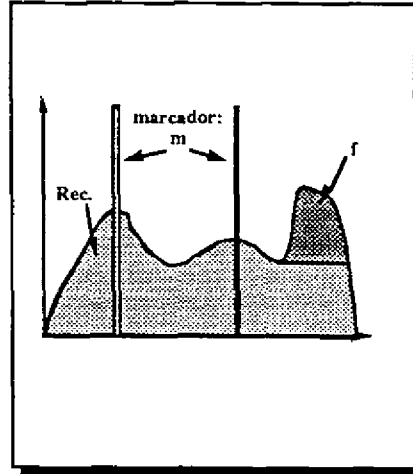
**Propósito:**

- Eliminar de una función los máximos (o mínimos) que no interesan.

**Construcción:**

- Se utilizan "marcadores": una función de dos niveles (0,m) que identifica los picos de interés.
- El proceso de reconstrucción crea una función que es igual a la original en las zonas de interés y ha eliminado los máximos que no tienen marcadores.
- Si  $f$  y  $m$  denotan la función original y el marcador:

$$\gamma^{\text{rec}}(f,m) = \bigvee_n \delta_f^{(n)}(m)$$

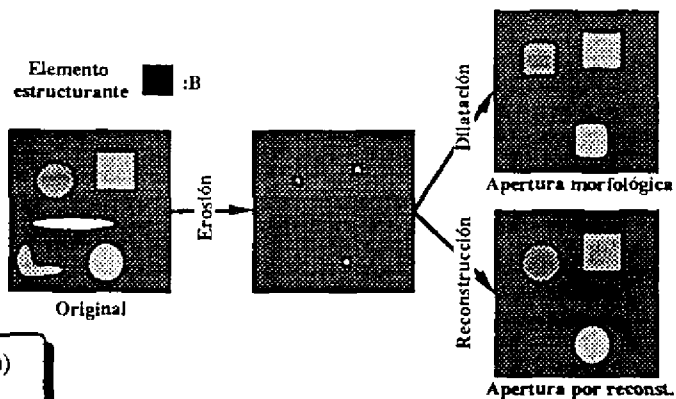


## Apertura por reconstrucción de erosión

**Propósito:**

En el caso multidimensional, la apertura morfológica modifica los contornos de los elementos. El objetivo de esta apertura con reconstrucción es reconstruir de forma eficiente y precisa los contornos de los elementos que no han sido eliminados por el filtrado.

- Esta transformación se puede interpretar en términos de reconstrucción:
  - la referencia es la señal original y
  - la entrada de la reconstrucción es el resultado de una erosión de la referencia.



$$\gamma^{\text{rec}}(f, \varepsilon_B(f)) = \bigvee_n \delta_f^{(n)}(\varepsilon_B(f))$$

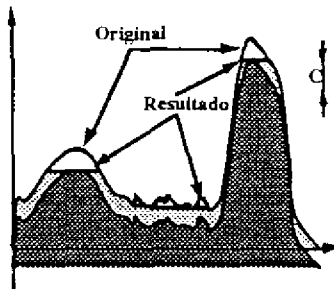
## Apertura de contraste

### Propósito:

Las aperturas morfológicas o por reconstrucción eliminan las componentes en función de su estructura espacial (tamaño, forma). El objetivo del filtrado de contraste es eliminar las componentes de contraste pequeño.

- Esta transformación se puede interpretar en términos de reconstrucción:
- la referencia es la señal original y
- la entrada de la apertura es la señal original menos una constante  $c$ .

$$\gamma^{ec}(f, f-c) = \bigvee_n \delta_f^{(n)}(f-c)$$



## Granulometría: enfoque intuitivo

### Definición:

- La granulometría es el estudio de las características en tamaño de la señal de origen.
- Un primer problema viene de la dependencia de las nociones de tamaño y forma.



=> De forma práctica, se necesita un conjunto de transformaciones que pueda seleccionar las componentes en función de sus tamaños: **Aperturas o cierres con varios elementos estructurantes.**

## Granulometría: enfoque teórico

### Axioma de la granulometría:

El análisis granulométrico conduce a definir familias de aperturas (o cierres) tales que:

- 1) dependen de un parámetro  $i$ : {  $\gamma_i$  },  $i > 0$  (cierre: {  $\phi_i$  },  $i > 0$ )
- 2) decrecen (o crecen en el caso de cierres) cuando el parámetro  $i$  crece:  
 $i \leq j \Rightarrow \gamma_j < \gamma_i$  , (Cierre:  $i \leq j \Rightarrow \phi_i < \phi_j$ )

- Este segundo axioma es equivalente a las leyes de absorción siguientes:

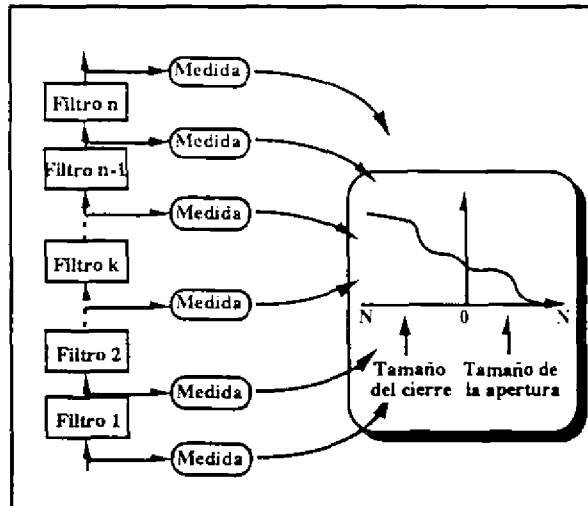
$$\gamma\gamma_j = \gamma_j\gamma_i = \gamma_{\sup(i,j)} , \quad (\text{cierre: } \phi\phi_j = \phi\phi_i = \phi_{\sup(i,j)})$$

Es decir que la composición de dos operaciones es igual a la más severa.

- En la práctica, lo más simple consiste en utilizar como familia de transformaciones varias aperturas morfológicas con elementos estructurantes homotéticos. Tenemos una granulometría si y sólo si el elemento estructurante es convexo.

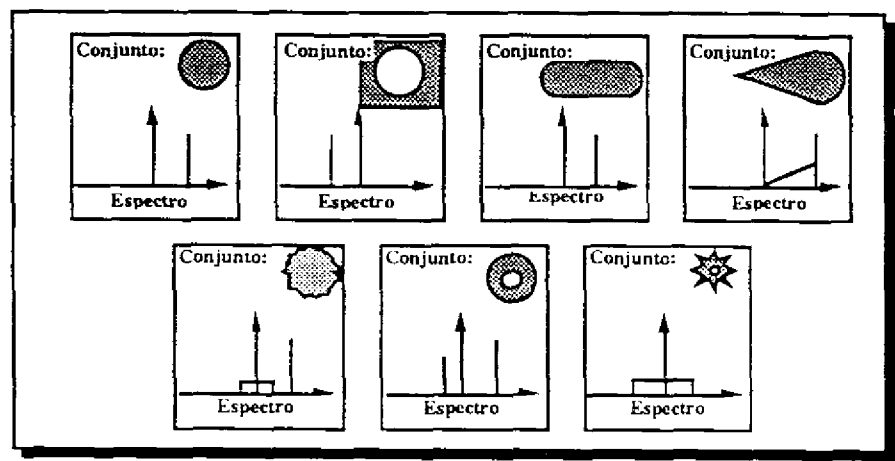
## Granulometría: enfoque práctico

- De forma práctica, la granulometría se calcula con un banco de filtros.
- Cada filtro es una apertura (o un cierre) que elimina las componentes de un tamaño dado.
- La familia de aperturas o cierres se construye a partir de un elemento estructurante (círculo, cuadrado) de tamaño variable.
- A la salida de cada filtro se mide un parámetro, por ejemplo la superficie de los conjuntos o la integral de la función, resultando en una curva monótona.



## Granulometría: ejemplos

- En la práctica, se utiliza a menudo *el espectro granulométrico* que es la derivada de la curva granulométrica.





---

- III -

**Filtros Morfológicos**

**b: Caso general**

---

---

---

**Plan de la sección III.b**

**Filtros morfológicos**

**Estructura serie:**

composición de filtros  
-> Producto  $\theta\psi, \theta\psi\theta$   
-> Filtro alternado secuencial

**Estructura en paralelo:**

combinación con sup e inf  
-> Centro morfológico  
-> Aumento de contraste

---

---

## Definición de los filtros morfológicos (I)

- La palabra "filtro" es poco precisa y depende del contexto en el cual se utiliza. A veces significa un filtro lineal, a veces quiere decir cualquier sistema que tiene como mínimo una salida del mismo tipo que la entrada. En morfología esta palabra tiene el sentido siguiente:

### **Definición:**

Un **filtro morfológico** es cualquier transformación **creciente e idempotente**.

### *Creciente:*

- Este requisito es el más fundamental. Asegura que la estructura básica del retículo, es decir la relación de orden, se conserve después del filtrado morfológico.
- Esta propiedad implica que el filtro sólo puede perder información.

## Definición de los filtros morfológicos (II)

### *Idempotente:*

- Este segundo requisito viene de un problema importante en el caso de filtros no lineales. Cuando el filtro no es lineal, el análisis en frecuencia no tiene sentido: el conocimiento del comportamiento del filtro para dos sinusoides no dice nada del comportamiento del filtro para la suma de las dos sinusoides.
- Para cubrir esta falta de herramientas, se buscan señales no afectadas por el filtrado (la idea es similar al concepto de filtro lineal ideal paso banda).
- Un filtro idempotente es un filtro que transforma, en un único filtrado, una señal original en una señal que no es afectada por el filtro.
- La idempotencia limita la pérdida de información resultante de la propiedad de crecimiento. Se puede notar que el mismo concepto aparece en el filtrado lineal precisamente en los casos no reversibles (filtro ideal paso banda).

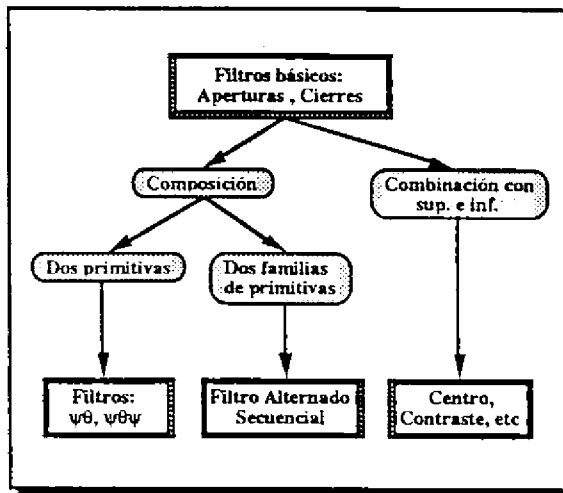
## Metodología de creación de filtros morfológicos

- Hasta ahora hemos visto dos únicos ejemplos de filtros morfológicos: la apertura y el cierre.

=> Para crear otros filtros morfológicos, dos tipos de combinaciones son posibles:

**Serie:**  
Composiciones de filtros básicos.

**Paralelo:**  
Combinaciones de filtros básicos con sup. y inf.



## Composición de dos primitivas

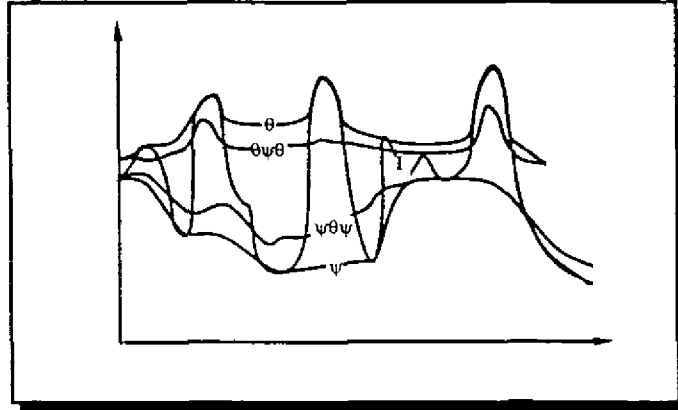
- A partir de dos filtros  $\theta$  y  $\psi$  que cumplan una relación de orden ( $\theta > \psi$ ), se pueden construir algunos (no muchos) filtros por composición. Los resultados más importantes se dan en el teorema siguiente:

### Teorema:

- Si  $\theta$  y  $\psi$  son dos filtros morfológicos tales que  $\theta > \psi$ , entonces
- $\theta\psi$ ,  $\psi\theta$ ,  $\theta\psi\theta$ ,  $\psi\theta\psi$  son filtros morfológicos (crecientes e idempotentes)
  - $\psi < \psi\theta\psi < \begin{matrix} \theta\psi \\ \psi\theta \end{matrix} < \theta\psi\theta < \theta$
  - $\theta\psi\theta$  es el menor filtro mayor que  $\psi\theta \vee \theta\psi$   
 $\psi\theta\psi$  es el mayor filtro menor que  $\psi\theta \wedge \theta\psi$
  - Las equivalencias siguientes se cumplen:  $\theta\psi\theta = \psi\theta \Leftrightarrow \psi\theta\psi = \theta\psi \Leftrightarrow \theta\psi < \psi\theta$

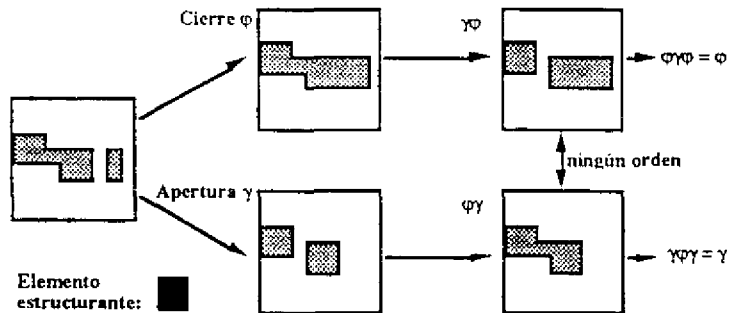
**Nota:** La composición con más de tres filtros no representa un nuevo filtro. En efecto, como  $\theta\psi$  es un filtro, es idempotente. Es decir:  $\theta\psi\theta\psi = \theta\psi$  (de la misma forma  $\psi\theta\psi\theta = \psi\theta$ )

## Relación de orden entre las composiciones



## Comparación $\psi\theta$ y $\theta\psi$

- En la práctica, las dos primitivas básicas que se utilizan para las composiciones son una apertura y un cierre.
- El teorema anterior indica que en general no hay una relación de orden entre  $\theta\psi$  y  $\psi\theta$ .



- Existe un caso clásico donde el punto 4) del teorema anterior se cumple. Es el caso donde  $\psi$  es una apertura morfológica con un elemento estructurante monodimensional y  $\theta$  es el cierre dual de  $\psi$ . En este caso las composiciones  $\theta\psi$  y  $\psi\theta$  son ordenadas:  $\gamma\psi_{1D} < \psi\gamma_{1D}$

## Inf-filtro, sup-filtro y filtro fuerte

### Propósito:

Los conceptos de filtros inf-, sup- y fuerte han sido introducidos para caracterizar la robustez de algunas composiciones del tipo  $\theta\psi$ . Aquí "robustez" indica la sensibilidad del resultado del filtrado a variaciones de la señal de entrada.

### Definición:

- Un filtro  $\psi$  es un  $\vee$ -filtro si  $\psi = \psi(I\vee\psi)$
- Un filtro  $\psi$  es un  $\wedge$ -filtro si  $\psi = \psi(I\wedge\psi)$
- Un filtro  $\psi$  es un filtro fuerte si  $\psi = \psi(I\vee\psi) = \psi(I\wedge\psi)$

### Teorema:

Se pueden demostrar los resultados siguientes:

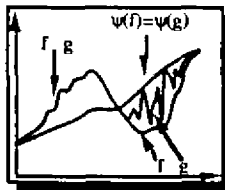
- Un filtro es un  $\vee$ -filtro si y sólo si es el producto de una apertura con un cierre:  $\gamma\phi$
- Un filtro es un  $\wedge$ -filtro si y sólo si es el producto de un cierre con una apertura:  $\phi\gamma$
- Si  $\phi$  es una apertura y  $\gamma$  un cierre, entonces:  $\phi$  y  $\gamma$  son filtros fuertes,  $\gamma\phi$  y  $\phi\gamma\phi$  son  $\vee$ -filtros,  $\phi\gamma$  y  $\gamma\phi\gamma$  son  $\wedge$ -filtros.

## Interpretación intuitiva de Inf-filtro, sup-filtro y filtro fuerte

La propiedad de  $\vee$ -filtro asegura que cualquier señal  $g$  situada entre la señal original  $f$  y el sup de  $f$  con el resultado del filtrado, tendrá el mismo resultado de filtrado que  $f$ .

$$\psi \text{ } \vee\text{-filtro} \Leftrightarrow$$

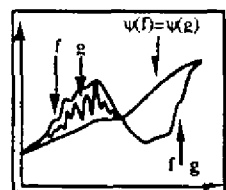
$$f \leq g \leq (f \vee \psi(f)) \Rightarrow \psi(g) = \psi(f)$$



La propiedad de  $\wedge$ -filtro asegura que cualquier señal  $g$  situada entre la señal original  $f$  y el inf de  $f$  con el resultado del filtrado, tendrá el mismo resultado de filtrado que  $f$ .

$$\psi \text{ } \wedge\text{-filtro} \Leftrightarrow$$

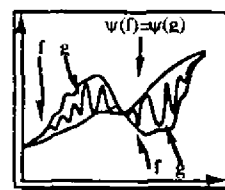
$$(f \wedge \psi(f)) \leq g \leq f \Rightarrow \psi(g) = \psi(f)$$



La propiedad de filtro fuerte asegura que cualquier señal  $g$  situada entre la señal original  $f$  y el resultado del filtrado, tendrá el mismo resultado de filtrado que  $f$ .

$$\psi \text{ filtro fuerte} \Leftrightarrow$$

$$[f \wedge \psi(f) \leq g \leq f \vee \psi(f)] \Rightarrow \psi(g) = \psi(f)$$



## Composición de dos familias de primitivas

- El número de filtros diferentes que se consigue por composición de dos filtros es bastante limitado. Para crear nuevos filtros, se puede componer no sólo dos filtros sino dos **familias** de filtros. Esta idea ha dado origen a los **filtros alternados secuenciales**:

### Definición:

- Consideramos dos familias de filtros  $\{\theta_i\}$  y  $\{\psi_i\}$  con tres propiedades:

- 1)  $\{\psi_i\}$  es decreciente respecto a  $i$ ,
  - 2)  $\{\theta_i\}$  es creciente respecto a  $i$ ,
  - 3)  $\psi_1 \leq \theta_1$
- $$\left. \begin{array}{l} 1) \{\psi_i\} \text{ es decreciente respecto a } i, \\ 2) \{\theta_i\} \text{ es creciente respecto a } i, \\ 3) \psi_1 \leq \theta_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \dots \psi_n < \dots < \psi_2 < \psi_1 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n \dots$$

- Las composiciones siguientes son filtros llamados **filtros alternados secuenciales**:

$$M_i = \theta_i \psi_i \dots \theta_2 \psi_2 \theta_1 \psi_1$$

$$N_i = \psi_i \theta_i \dots \psi_2 \theta_2 \psi_1 \theta_1$$

$$R_i = \psi_i \theta_i \psi_i \dots \psi_2 \theta_2 \psi_2 \psi_1 \theta_1 \psi_1$$

$$S_i = \theta_i \psi_i \theta_i \dots \theta_2 \psi_2 \theta_2 \theta_1 \psi_1 \theta_1$$

## Propiedades de los filtros alternados secuenciales

### Ley de absorción:

- si  $i \leq j \Rightarrow M_i M_j = M_j$  pero  $M_j M_i < M_j$
- Relaciones similares para los otros tres filtros alternados secuenciales  $N$ ,  $R$  y  $S$ .
- $\Rightarrow$  La ley de absorción dice que si el filtrado más severo se hace después (¡no antes!) del filtrado menos severo, entonces el filtrado global es igual al filtrado más severo.

### Dualidad:

- En general, los filtros alternados secuenciales no son auto-duales. Es decir que:

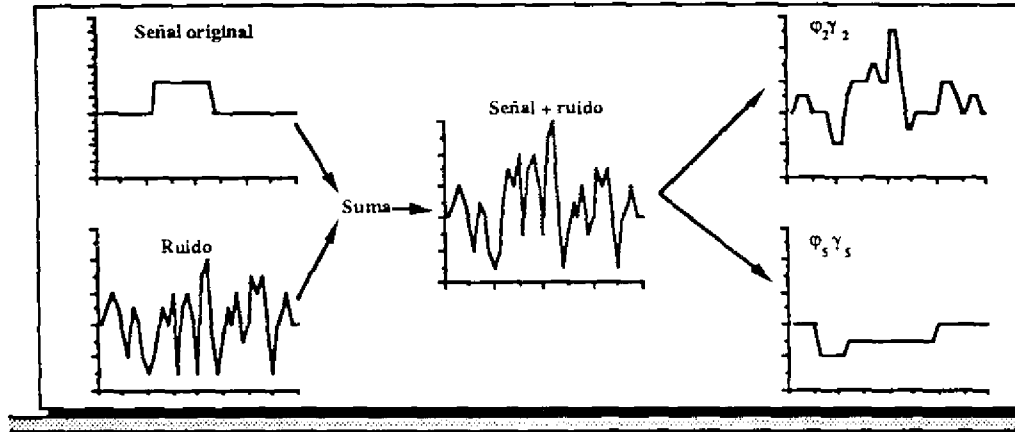
$$M_i((\cdot)^c) \neq (M_i(\cdot))^c$$

### Compatibilidad con el cambio de resolución:

- Si las familias de primitivas son compatibles con el cambio de resolución, es decir:
 
$$\psi_k(h_k(\cdot)) = h_k(\psi_1(\cdot)), \theta_k(h_k(\cdot)) = h_k(\theta_1(\cdot))$$
 donde  $h_k(\cdot)$  representa el cambio de resolución (homotecia espacial o temporal), entonces los filtros alternados secuenciales son también compatibles.
- De forma intuitiva, esta propiedad dice que los filtros de orden  $k$  trabajan a una resolución  $k$  de la misma manera que el filtro de orden 1 a una resolución 1.

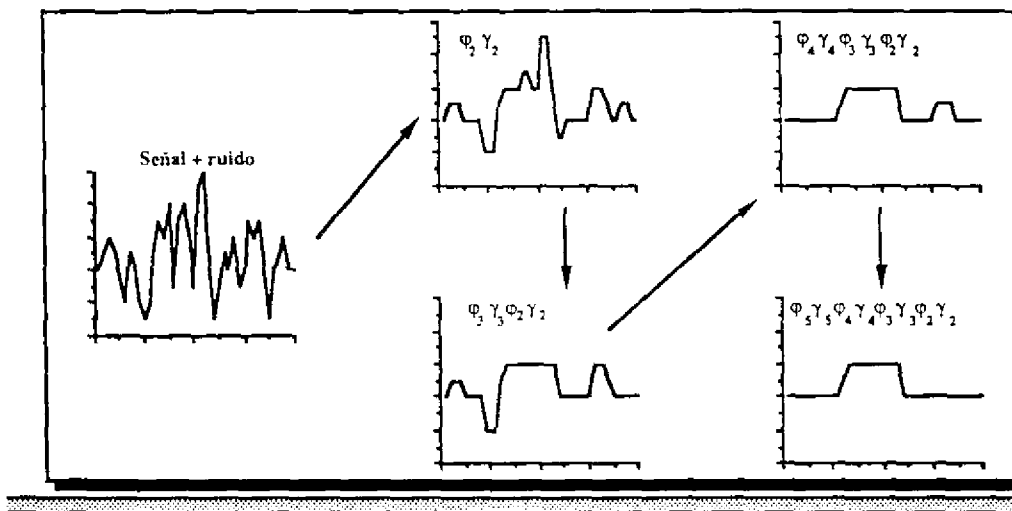
## Utilidad de los filtros alternados secuenciales (I)

- En general, las dos familias de transformaciones básicas son familias de aperturas y cierres que cumplen las leyes del axioma de la granulometría. En este caso, los filtros alternados secuenciales son muy útiles para señales con ruido.
- El ejemplo siguiente muestra que una simple composición de apertura y cierre no permite eliminar ruido. ¡En particular no sirve de nada aumentar el tamaño del elemento estructurante!



## Utilidad de los filtros alternados secuenciales (II)

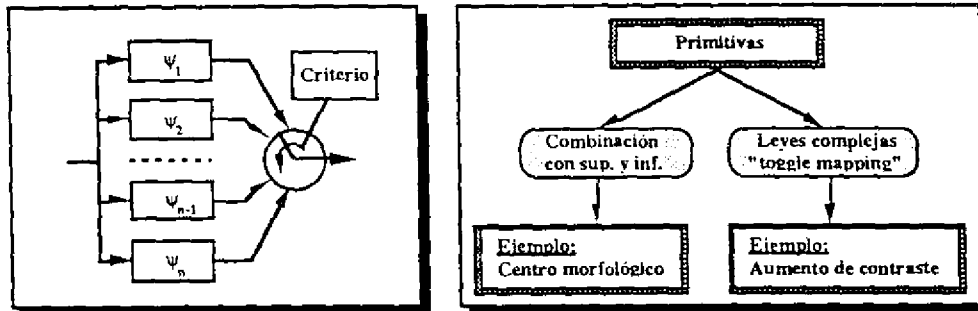
- Un filtro alternado secuencial permite cancelar el ruido y llegar de forma suave a una buena estimación de la señal sin ruido.



## Combinación con sup. e inf.

### Metodología:

Con el objetivo de crear nuevos filtros sin composiciones, se considera ahora que disponemos de una familia de primitivas y que la salida del filtro es siempre el valor de una de las primitivas. En principio, la ley de elección de la primitiva se hace con sup. e inf. pero se ha extendido también a otras leyes más complejas creando lo que se llama "toggle mapping".



## Centro morfológico

### Propósito:

- El objetivo de esta transformación es crear filtros autoduales. Es un tipo de centro de gravedad según el retículo con sup e inf.

### Definición teórica:

- El centro morfológico respecto a la familia  $\{\psi_i\}$  se define como:

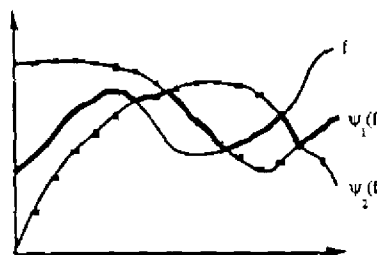
$$\beta(f) = [f \vee (\bigwedge_i \psi_i(f))] \wedge (\bigvee_i \psi_i(f))$$

### Definición intuitiva:

En cada punto:

- Si todos los  $\psi$  son mayores que el original, el centro es el más pequeño de los  $\psi$ .
- Si todos los  $\psi$  son menores que el original, el centro es el más grande de los  $\psi$ .
- Sino el centro es el original.

### Ejemplo de centro morfológico





## Propiedades del centro morfológico

### Auto dualidad:

- Si la familia de primitivas en conjunto es autodual (cada primitiva tiene su dual en la familia), el centro es autodual.

### Filtro fuerte:

- Si las primitivas son filtros fuertes, el centro es un filtro fuerte.

### Idempotencia:

- En general, el centro no es idempotente. Pero con cualquier apertura  $\gamma$  y cierre  $\varphi$ :

$$\beta = [I \wedge \varphi \gamma \varphi] \vee \gamma \varphi \gamma, \quad \alpha = \beta^n \text{ hasta idempotencia}$$

El centro iterado hasta idempotencia  $\alpha$  es un filtro fuerte (y autodual si la apertura y el cierre son autoduales). Además:

$$I \vee \beta^{k+1} > I \vee \beta^k \quad \text{y} \quad I \wedge \beta^{k+1} < I \wedge \beta^k$$

=> Esta propiedad distingue el centro morfológico del filtro de mediana que también es autodual pero que no es idempotente, y puede oscilar en algunos puntos.

## Un ejemplo de "toggle mapping": el aumento de contraste

### Propósito:

- Esta transformación es un tipo de anti-centro morfológico. Su objetivo no es dar una señal cercana a la señal original sino crear una señal más contrastada.

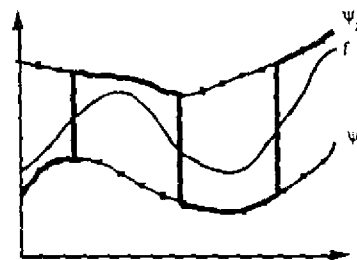
### Definición:

- Dada una transformación anti-extensiva, una extensiva y una señal original  $f$ , el resultado es el valor de la transformación más próxima a  $f$ .

### Propiedad:

- Si las primitivas son una apertura y un cierre, la transformación resultante es idempotente (pero no creciente).

### Ejemplo de aumento de contraste



---

- IV -

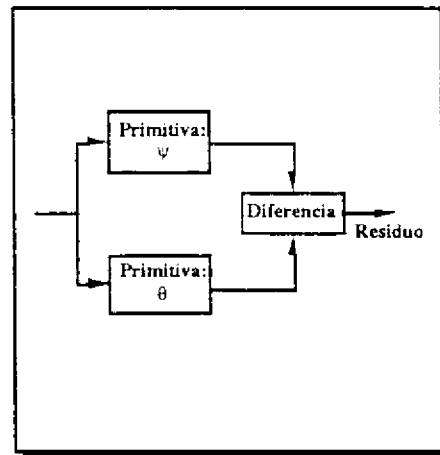
**Residuos**

---

---

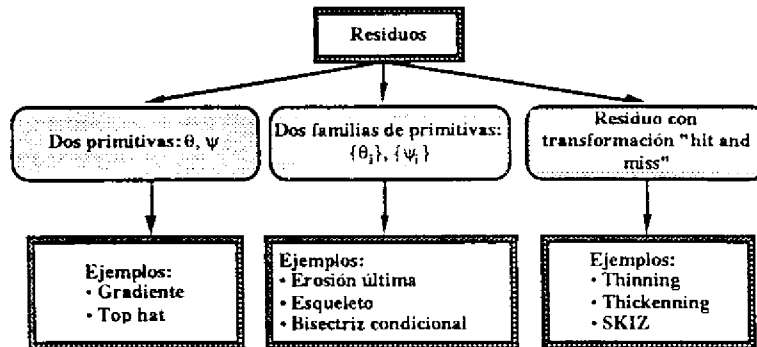
**Nociones de residuo en morfología**

- La teoría de los filtros morfológicos ha recalcado las propiedades de crecimiento, de idempotencia y las relaciones de ordenación entre las transformaciones.
- Existe una familia de transformaciones que estudia la diferencia entre dos (o muchas) transformaciones básicas. El factor común entre ellas es el hecho que su resultado es una **diferencia** o un **residuo**.

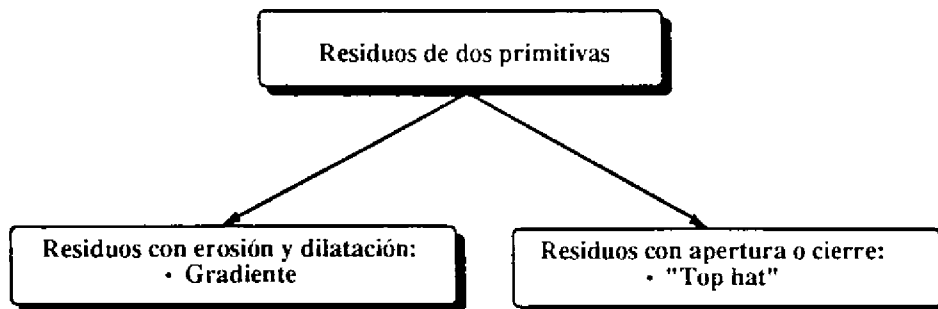


## Clasificación de los residuos

- Los residuos que se utilizan en la práctica se pueden clasificar en tres tipos:
  - 1) Los residuos de dos primitivas
  - 2) Los residuos de dos familias de primitivas
  - 3) Los residuos utilizando transformaciones "hit and miss"



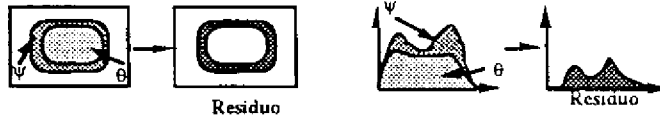
## Plan de la sección IV.a



## Residuos de dos primitivas

**Definición:**

- El residuo entre dos funciones  $\theta$  y  $\psi$  es la diferencia entre los resultados de cada función:
- caso de conjuntos:  $\mathfrak{R}_{\psi, \theta}(X) = \psi(X) \setminus \theta(X) = \psi(X) \cap [\theta(X)]^c$
- caso de funciones:  $\mathfrak{R}_{\psi, \theta}(f) = \psi(f) - \theta(f)$



## Residuos para conjuntos y funciones

**Nota:**

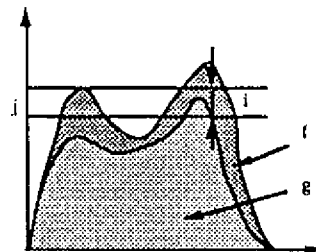
- Las transformaciones de residuo no son crecientes, por lo que el paralelismo entre funciones y conjuntos no se puede hacer de forma simple. En particular, no se puede calcular los residuos en cada nivel de una función y sumar los resultados para calcular el residuo de la función.

• Si  $X_i(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \geq i \\ 0 & \text{si } f < i \end{cases}$

La correspondencia entre residuos de funciones y de conjuntos es la siguiente:

$$X_i(f-g) = \bigcup_{j=0}^i [X_{i+j}(f) \cap X_{j+1}^c(g)]$$

$$X_i(f-g) = \bigcup_{j=0}^i [X_{i+j}(f) \setminus X_{j+1}(g)]$$



## Gradientes

**Propósito:**

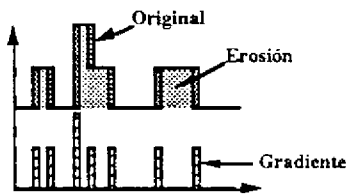
- El objetivo de los gradientes es resaltar los puntos de contorno. En morfología se definen tres gradientes mediante un disco unitario:

**Gradiente por erosión:**

- Es el residuo tomando como primitivas la identidad y una erosión:

$$g^-(.) = \mathfrak{R}_{I, \epsilon}(.)$$

- Para conjuntos  $g^-(X) = X \setminus \epsilon(X)$
- Para funciones  $g^-(f) = f - \epsilon(f)$

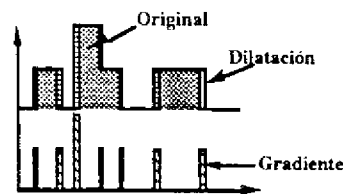


**Gradiente por dilatación:**

- Es el residuo tomando como primitivas una dilatación y la identidad:

$$g^+(.) = \mathfrak{R}_{\delta, I}(.)$$

- Para conjuntos  $g^+(X) = \delta(X) \setminus X$
- Para funciones  $g^+(f) = \delta(f) - f$



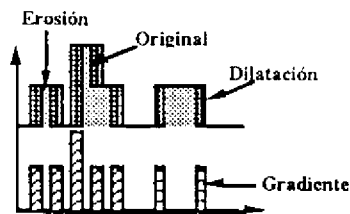
## Gradiente y Laplaciana Morfológicos

**Gradiente morfológico:**

- Es el residuo tomando como primitivas una dilatación y una erosión:

$$g(.) = \mathfrak{R}_{\delta, \epsilon}(.) / 2$$

- Para conjuntos  $g(X) = \delta(X) \setminus \epsilon(X)$
- Para funciones  $g(f) = (\delta(f) - \epsilon(f)) / 2$

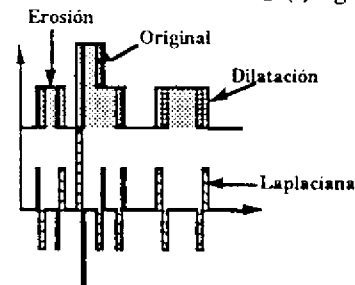


**Laplaciana morfológica:**

- Es el residuo tomando como primitivas los gradientes por dilatación y erosión.

$$L(.) = \mathfrak{R}_{g^+, g^-}(.)$$

- Para funciones  $L(f) = g^+(f) - g^-(f)$



Nota: Estas nociones se corresponden con el módulo del gradiente y la Laplaciana "clásicos" (si existen), en el límite, cuando el radio del disco tiende a cero.

## Transformación básica de "Top hat"

### Propósito:

- El objetivo principal del "Top hat" es extraer algunos elementos según un criterio de forma y de tamaño.

### Definición:

- El "Top hat" es el residuo tomando como primitivas la identidad y una apertura (compatible con la traslación vertical):

$$\mathcal{T}(\cdot) = \mathcal{R}_{I, \gamma}(\cdot)$$

-> En el caso de función:  $\mathcal{T}(f) = f - \gamma(f)$

- Se define también un "Top hat" dual, residuo entre un cierre y la identidad:

$$\mathcal{T}^*(\cdot) = \mathcal{R}_{\phi, I}(\cdot)$$

-> En el caso de función:  $\mathcal{T}^*(f) = \phi(f) - f$

## Propiedades del "Top hat"

### Idempotencia:

- El "Top hat" es idempotente, si además la señal original es positiva el "Top hat" es anti-extensivo:

$$\mathcal{T}(\mathcal{T}(f)) = \mathcal{T}(f), \quad f > 0 \Rightarrow \mathcal{T}(f) < f$$

- La apertura del resultado del "Top hat" es igual a cero:  $\gamma(\mathcal{T}(f)) = 0$

### Robustez:

- Si  $Z$  es el dominio donde la apertura de  $f$  es estrictamente menor que  $f$ :

$$Z = \{x : \gamma f(x) < f(x)\}$$

Entonces, si  $g$  es una función positiva de soporte incluido en  $Z$ :

$$\mathcal{T}(g) = g, \quad \mathcal{T}(f+g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g)$$

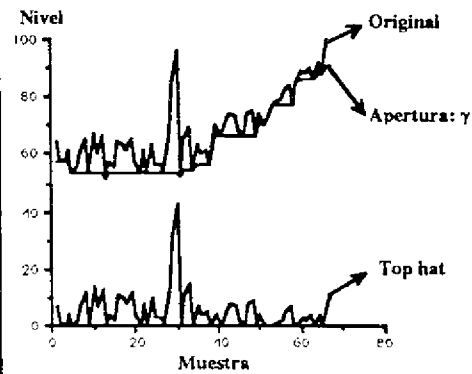
## Aplicación del "Top hat"

### Conjuntos:

- El "Top hat" aísla los objetos que no son eliminados por la apertura. Es decir, elimina los objetos más grandes que el elemento estructurante.

### Función:

- El "Top hat" sirve para extraer las componentes contrastadas respecto al entorno. El Top hat básico extrae las componentes positivas y el Top hat dual las componentes negativas.
- De forma intuitiva, el "Top hat" compensa las variaciones suaves de nivel, y así efectúa un aumento de contraste.



## Extensión del "Top hat"

### Propósito:

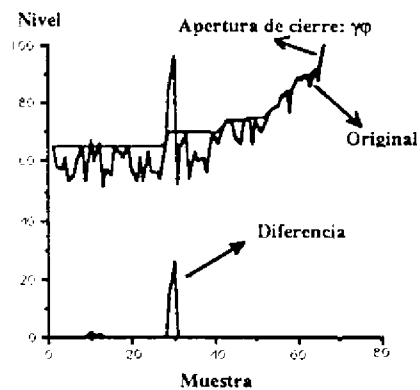
- El "Top hat" clásico realza los picos pero no elimina las fluctuaciones densas de la señal, es decir el ruido. A veces, no sólo es necesario compensar las variaciones suaves de la señal sino eliminar también el ruido. En este caso, puede utilizarse la extensión siguiente:

### Extensión del "Top hat":

- Residuo entre la identidad y el Inf. de la identidad con una apertura de un cierre:

$$T = \mathfrak{N}_{I, \gamma \circ \Delta}(\cdot)$$

$$T(f) = f - \gamma \varphi(f) \Delta f$$



**Resumen de los residuos de dos primitivas**

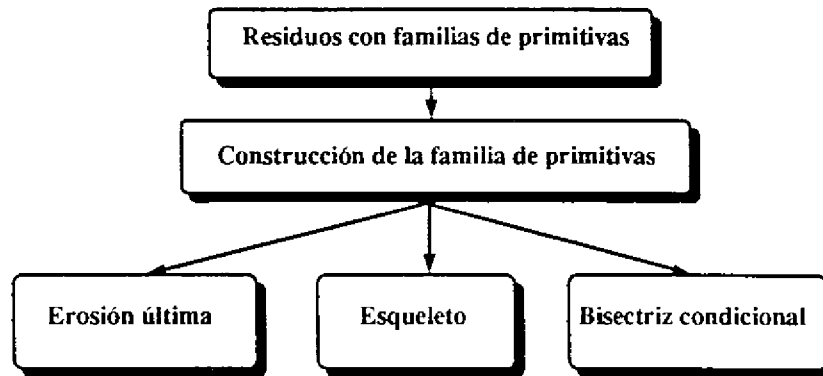
<b>Residuos:</b>	<b>Primera primitiva:</b>	<b>Segunda primitiva:</b>
• Gradiente por erosión	• I	• $\epsilon$
• Gradiente por dilatación	• $\delta$	• I
• Gradiente morfológico	• $\delta$	• $\epsilon$
• Laplaciana morfológica	• $g+$	• $g-$
• Top hat por apertura	• I	• $\gamma, \gamma^{rec}, \gamma\phi \wedge I$
• Top hat por cierre	• $\phi, \phi^{rec}, \phi\gamma \vee I$	• I

con I : identidad,  $\epsilon$  : erosión,  $\delta$  : dilatación,  $\gamma$  : apertura,  $\phi$  : cierre



---

## Plan de la sección IV.b



---

## Residuos de familias de primitivas

- En el resto de esta sección, trataremos sólo de conjuntos aunque las fórmulas son válidas para cualquier tipo de señal.

### Residuos de dos familias:

- Calcular los residuos de dos familias de primitivas crea una cantidad de información proporcional al número de primitivas de las familias. En morfología se ha considerado una forma de integrar esta información en un único resultado.
- En el caso de conjuntos, el residuo de dos familias de primitivas es la unión de los residuos de pares de primitivas:

Considerando dos familias de primitivas:  $\{\psi_i\}$  y  $\{\theta_i\}$

$$\mathfrak{R}_{\{\psi_i, \theta_i\}}(X) = \bigcup_i \mathfrak{R}_{\psi_i, \theta_i}(X) = \bigcup_i \psi_i(X) \setminus \theta_i(X)$$

## Elección de las familias de primitivas

- Se pueden considerar muchas familias de primitivas para crear transformaciones con residuos. En el contexto de operadores para conjuntos, una única familia de erosiones permite crear tres transformaciones muy importantes: la erosión última, el esqueleto y la bisectriz condicional. Por pedagogía, nos limitaremos al caso digital.

**Primitivas**  $\{\psi_i\} = \{\varepsilon_i\}$ :

- Sea  $\{\eta_i\}$  una familia de erosiones con elementos estructurantes convexos, elementales y dependientes del entero positivo  $i$ . Designaremos mediante  $\{\gamma_i\}$  la familia de las aperturas asociadas. A partir de la familia  $\{\eta_i\}$  construiremos la familia de erosiones:

$$\psi_i = \varepsilon_i = \eta_i \dots \eta_2 \eta_1$$

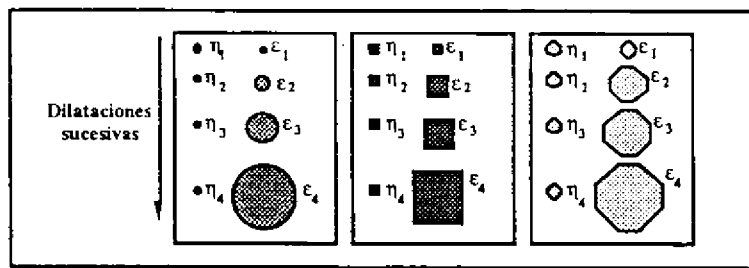
- Los elementos estructurantes correspondientes a estas erosiones se denominarán "bolas" (de tamaño  $i$ ), aunque no generan necesariamente una métrica.

## Ejemplos de familias (I): Familia homogénea

- Este caso es el más utilizado en la práctica. Se supone que todas las erosiones elementales son iguales. Es decir:

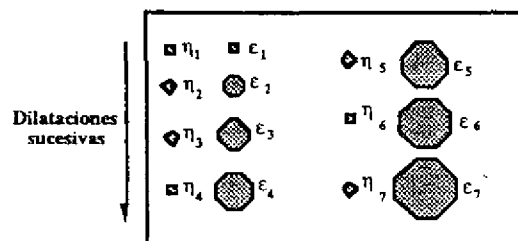
$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \eta_i &= \eta_j = \eta \\ \Rightarrow \varepsilon_i &= (\eta)^i \end{aligned}$$

- Por ejemplo, los elementos estructurantes son homotéticos de un conjunto simétrico (círculo, cuadrado, polígono):



## Ejemplos de familias (II): Familia no homogénea

- A veces, es necesario tener un medio de análisis más fino, es decir una progresión más lenta de la familia. En este caso, las erosiones elementales pueden cambiar de un orden al otro.
- Erosiones con una familia de polígonos tales que para cada dirección la extensión de cada lado de los polígonos es creciente.



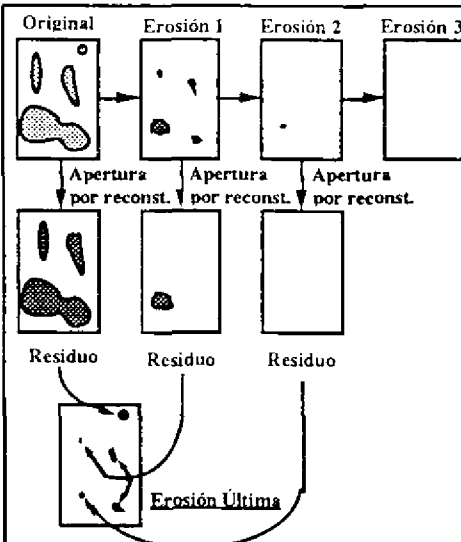
## Erosión última (I)

### Descripción intuitiva:

El objetivo es marcar los conjuntos. Para eso, se efectúan erosiones sucesivas y se observa a cada etapa si el conjunto ha desaparecido totalmente o no. El marcador es el resultado de la última erosión no nula.

Para saber si el conjunto va a desaparecer en la etapa siguiente, se efectúa la erosión de la etapa siguiente más una reconstrucción geodésica, es decir una apertura por reconstrucción. Hay dos casos:

- 1) *La erosión ha eliminado el conjunto:* El resultado de la reconstrucción es vacío.
- 2) *La erosión no ha eliminado el conjunto:* El resultado de la reconstrucción es el conjunto inicial.



## Erosión última (II)

### Definición:

- En el caso de un espacio digital, la erosión última es simplemente el residuo entre la familia de erosiones y la apertura por reconstrucción de la familia de erosiones:

Residuo entre  $\{\epsilon_i\}$  y  $\{\gamma^{oc}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})\}$

$$U(X) = \mathfrak{R}_{\{\epsilon_i, \{\gamma^{oc}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})\}\}}(X) = \bigcup_i \mathfrak{R}_{\epsilon_i, \gamma^{oc}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})}(X) = \bigcup_i U_i(X)$$

### Propiedades:

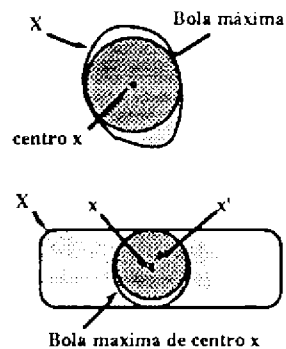
- La erosión última es anti-extensiva y los  $U_i$  son disjuntos.
- $U(X)$  es de anchura pequeña, ya que su erosión con  $\cup \epsilon_i$  es vacía.
- Cuando la familia es homogénea, la erosión última es idempotente.
- Si un  $U_i$  se dilata con el elemento estructurante  $i$ , el resultado es una bola máxima. Es decir que está incluido en el conjunto inicial y que no existe otro elemento estructurante más grande en la familia que permita crear una dilatación de  $U_i$  que esté incluida en el conjunto inicial.

## Bolas máximas

- El estudio de la erosión última ha introducido el concepto de bola máxima. Su definición formal es la siguiente:

### Definición:

- Llamamos bola de tamaño  $n$  y de centro  $x$  a la dilatación del punto  $x$  por el elemento estructurante  $n$  de la serie:  $\delta_n(x)$
- Una bola de tamaño  $n$  y de centro  $x$  es máxima respecto al conjunto  $X$ , si no existe otro índice  $k$  ni otro centro  $x'$  tales que:  $\delta_n(x) \subset \delta_k(x') \subset X$ ,  $k > n$



Si son simétricas, las bolas máximas identifican los puntos equidistantes de como mínimo dos puntos de la frontera.

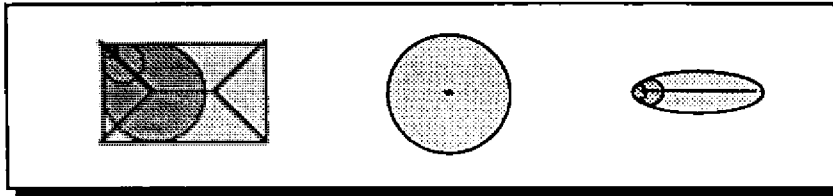
## Esqueleto: definición

- La erosión última era un conjunto de centros de bolas máximas. El conjunto de todos los centros de bolas máximas define el **esqueleto**.

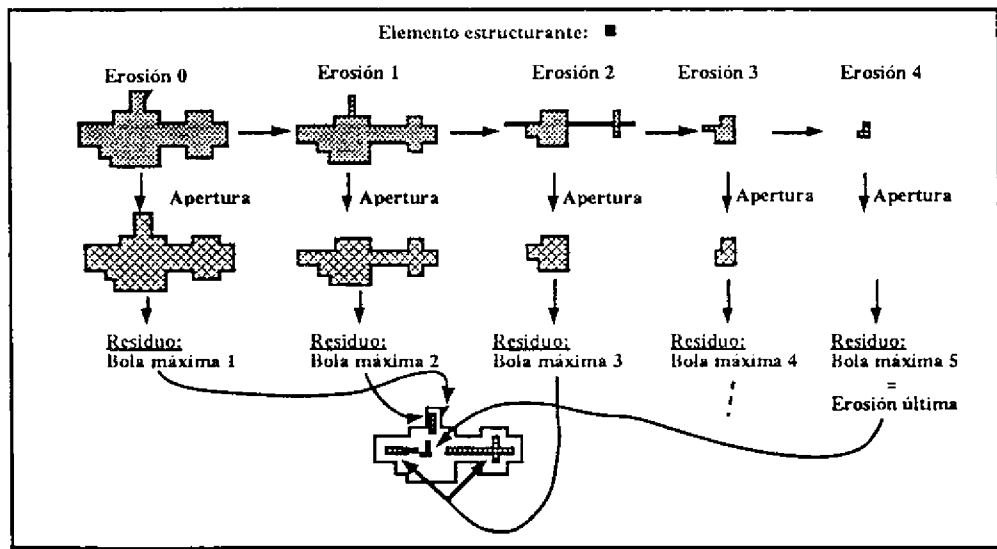
### Definición:

- El esqueleto del conjunto X según una familia de bolas  $\{\delta_n\}$  es el conjunto de los centros  $x$  de bolas máximas de centro  $x$ .

Nota: Si las bolas son simétricas, el esqueleto representa más o menos una línea mediana del conjunto.



## Esqueleto: Construcción



## Esqueleto: Algoritmo

- El algoritmo que permite calcular el esqueleto es exactamente el mismo que para la erosión última cambiando la apertura con reconstrucción por una apertura de tamaño unitario:

### Algoritmo:

- En el caso de familia homogénea, el esqueleto es el residuo entre la familia de erosiones y la apertura de tamaño unitario de la familia de erosiones:  
Residuo entre  $\{\epsilon_i\}$  y  $\{\gamma\epsilon_i\}$

$$S(X) = \mathfrak{R}_{\{\epsilon_i\}, \{\gamma\epsilon_i\}}(X) = \bigcup_i \mathfrak{R}_{\epsilon_i, \gamma\epsilon_i}(X) = \bigcup_i S_i(X)$$

- En el caso de una familia no homogénea el esqueleto se define como:  
Residuo entre  $\{\epsilon_i\}$  y  $\{\gamma_{i+1}\epsilon_i\}$

Nota: La función que tiene como soporte el esqueleto y como nivel el valor del radio de la bola máxima se llama **función de extinción**.

## Esqueleto: Propiedades (I)

### Tamaño:

- El esqueleto es de anchura pequeña en el sentido que su erosión con  $\cup\pi_1$  (la erosión elemental en el caso de familia homogénea) es vacía.

### Anti-extensivo e idempotente:

- $X \supset S(X)$ , y
- Cuando la familia es homogénea,  $S(S(X)) = S(X)$

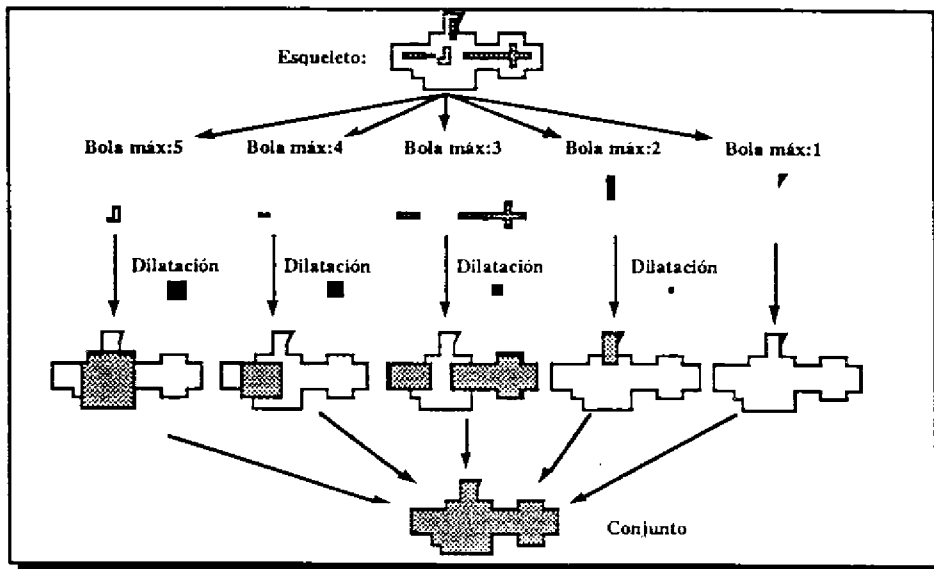
### Preservación de la información:

- El conjunto  $X$  y sus aperturas se pueden reconstruir a partir de su esqueleto y de la función de extinción:

$$X = \bigcup_{i \geq 0} \delta_i(S(X)) \quad \gamma_j(X) = \bigcup_{i \geq j} \delta_i(S(X))$$

=> La transformación es reversible y constituye otra representación del retículo inicial.

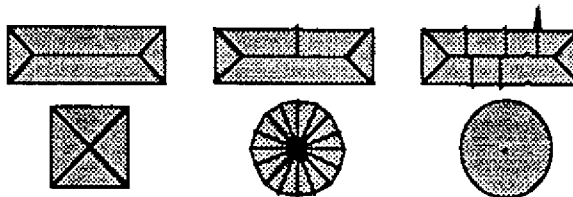
## Reversibilidad del esqueleto



## Esqueleto: Propiedades (II)

### Discontinuidad:

- La transformación en esqueleto no es continua. Por tanto una pequeña variación del conjunto inicial puede dar lugar a un esqueleto muy diferente:



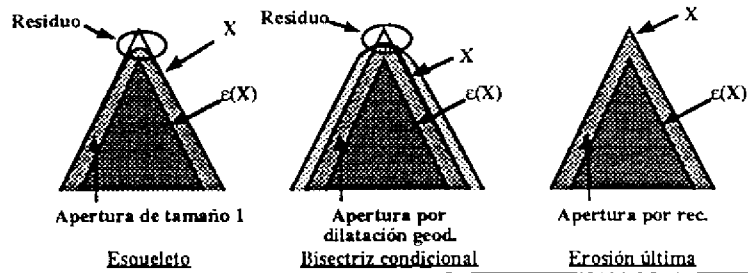
=> Para resolver este punto se ha introducido un tipo de esqueleto más suave: la bisectriz condicional.

### Conexidad:

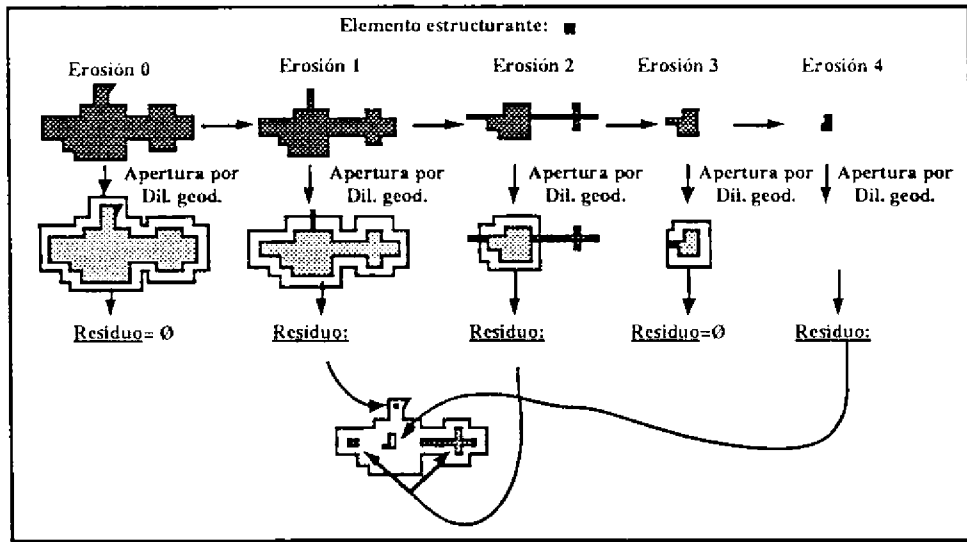
- Aunque en el caso continuo el esqueleto preserva la conexidad, esta propiedad desaparece en digital. Si la conservación de la conexidad es importante, se utilizan otras técnicas basadas en "hit or miss".

## Bisectriz condicional

- El paso de la erosión última al esqueleto consiste en cambiar la apertura por reconstrucción por una apertura elemental. Estas dos aperturas son ordenadas:  $\gamma^{rec}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) > \gamma(\epsilon_i)$
- La bisectriz condicional representa un caso intermedio entre estos dos extremos. Se basa en la familia de aperturas por dilatación geodésica siguiente:  
 $\delta_{\epsilon_i}^{(n)} \epsilon_{i+1}, \quad \gamma \epsilon_i < \delta_{\epsilon_i}^{(n)} \epsilon_{i+1} < \gamma^{rec}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})$
- Las aperturas crecen con el tamaño de B.



## Bisectriz condicional: Construcción





## Bisectriz condicional: Algoritmo

**Algoritmo:**

- La bisectriz condicional es el residuo entre la familia de erosiones y la apertura por dilatación geodésica de las erosiones:

Residuo entre  $\{\epsilon_i\}$  y  $\{\delta_{\epsilon_i}^{(n)}\epsilon_{i+1}\}$

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{R}_{\{\epsilon_i\}, \{\delta_{\epsilon_i}^{(n)}\epsilon_{i+1}\}}(X) = \bigcup_i \mathcal{R}_{\epsilon_i, \delta_{\epsilon_i}^{(n)}\epsilon_{i+1}}(X) = \bigcup_i \mathcal{B}_i(X)$$

**Propiedades:**

- La bisectriz tiene las mismas propiedades que la erosión última y el esqueleto (anchura pequeña, anti-extensividad, idempotencia, etc)
- En la práctica, la bisectriz elimina las ramificaciones parásitas del esqueleto y permite una identificación más precisa de las componentes de los conjuntos que la erosión última.

## Resumen de los residuos de dos familias de primitivas

Residuos:	Primera familia:	Segunda familia:
• Erosión última	• $\epsilon$	• Apertura por recons.
• Bisectriz condicional	• $\epsilon$	• Apertura geodésica
• Esqueleto	• $\epsilon$	• Apertura unitaria

con  $\epsilon$  : erosión.

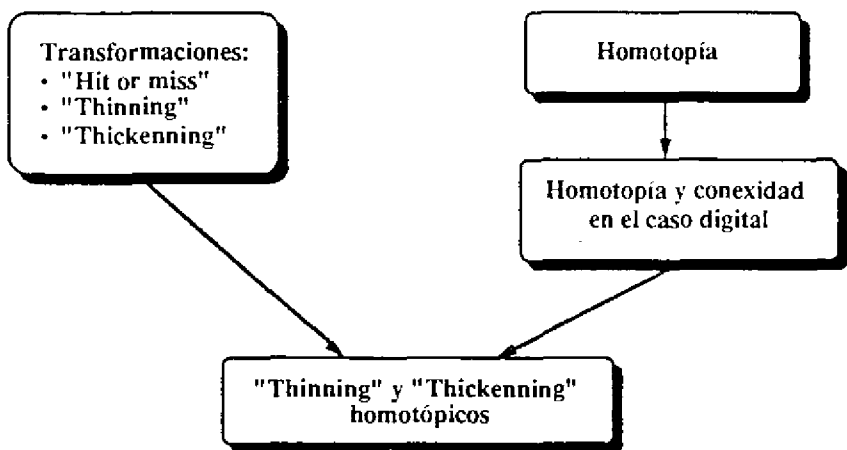
---

**IV-c**  
**Residuos y homotopía**

---

---

**Plan de la sección IV.c**

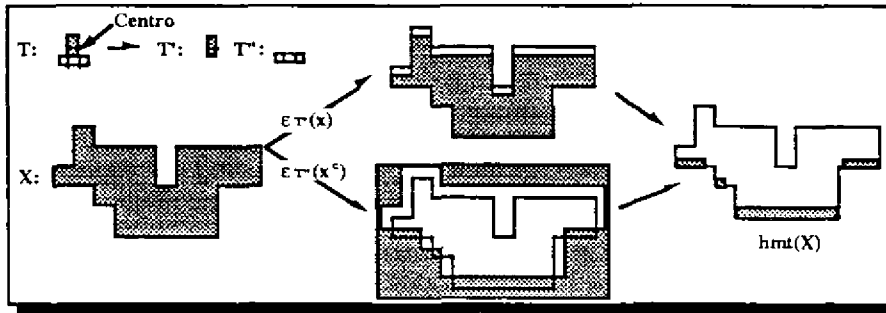


## Transformación en "hit or miss"

**Definición:**

- Las transformaciones en "hit or miss" son una generalización de las transformaciones del tipo erosión o dilatación. Utilizan un par de elementos estructurantes disjuntos  $T$  y  $T^c$ :  $T=(T, T^c)$ . Se puede definir como:

$$hmt_T(X) = \epsilon_T(X) \cap \epsilon_{T^c}(X^c)$$

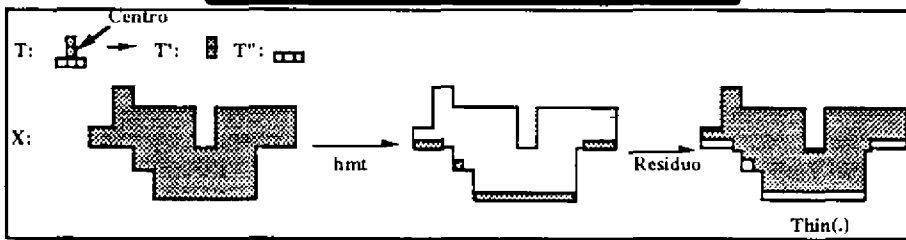


## "Thinning" y "Thickening"

**Definición:**

- El "thinning" es el residuo entre el conjunto inicial y su transformación por "hit or miss":

$$Thin_T(X) = \mathfrak{R}_{1,hmt_T}(X) = X \setminus [ \epsilon_T(X) \cap \epsilon_{T^c}(X^c) ]$$



- Por dualidad, se define el "thickening":

$$Thick_T(X) = X \cup hmt_T(X) = X \cup [ \epsilon_T(X) \cap \epsilon_{T^c}(X^c) ]$$

## Propiedades del "thinning" y "thickening"

### Extensividad:

- El "thinning" es anti-extensivo
- El "thickening" es extensivo

### Dualidad:

- Los "thinning" y "thickening" son duales en el sentido siguiente:

$$\text{Thin}_{(\tau, \tau^*)}(X) = (\text{Thick}_{(\tau^*, \tau)}(X^c))^c$$

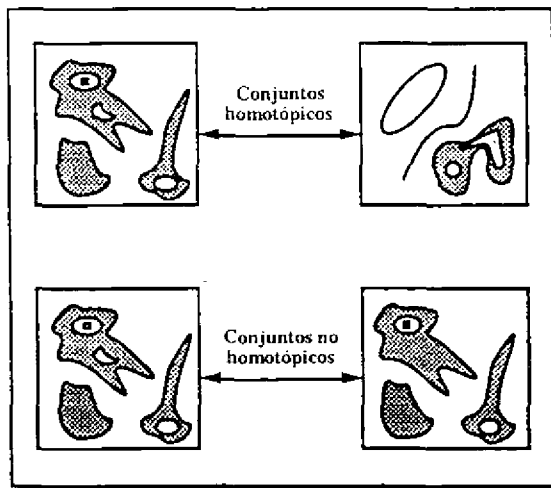
### Utilidad:

- En morfología, los "thinning" y "thickening" se utilizan para construir transformaciones que conservan la homotopía, y en particular para calcular esqueletos homotópicos.

## Homotopía para conjuntos

### Definición de homotopía:

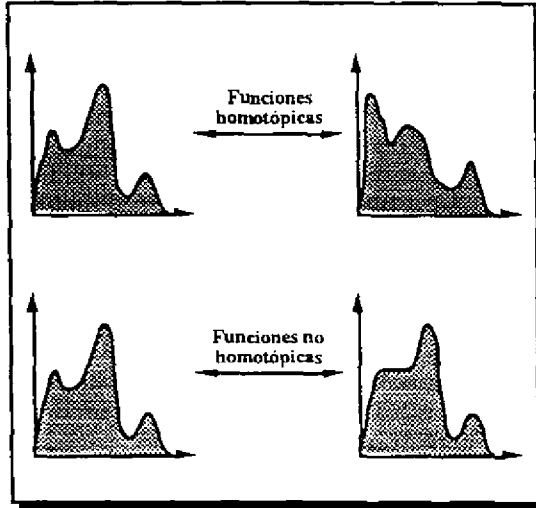
- Dos conjuntos son homotópicos si existe una transformación continua que lleva de uno a otro.
- De forma intuitiva, la homotopía caracteriza la composición del conjunto en número de regiones y de agujeros.



## Homotopía para funciones

### Definición de la homotopía:

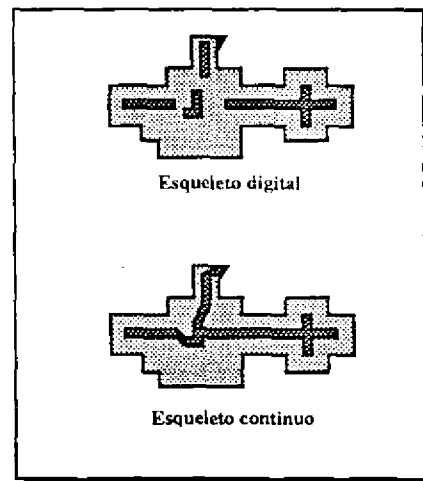
- La noción de homotopía para funciones se define a partir del apilamiento de conjuntos equivalente: Empezando por el nivel más bajo, los conjuntos son homotópicos y las *variaciones* de homotopía son equivalentes cuando se sube en los niveles.
- De forma intuitiva, la homotopía caracteriza la estructura de los picos, las valles y los pasos.



## Transformaciones homotópicas

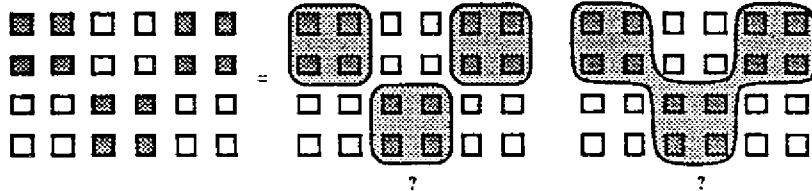
### Definición:

- Una transformación es homotópica cuando entrada y salida tienen la misma homotopía.
- Hasta ahora, la única transformación homotópica que se ha encontrado es el esqueleto continuo. En digital, esta propiedad desaparece.
- Para recuperar la homotopía, se buscan enfoques digitales que puedan sustituir al esqueleto que trabajen con "thinning".

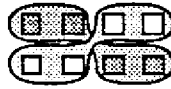


## Homotopía y conexidad en digital

- En el caso digital, la definición de la conexidad y por consecuencia de la homotopía no es obvia. Por ejemplo no es obvio cuantos conjuntos hay en la figura siguiente:



- Para definir la conexidad, es necesario elegir reglas que conecten entre ellos los puntos de los conjuntos y los del fondo.
- Nota: La regla de conexión tiene que prohibir los cruces entre puntos de un conjunto y del fondo:



## Conexidad en malla cuadrada (I)

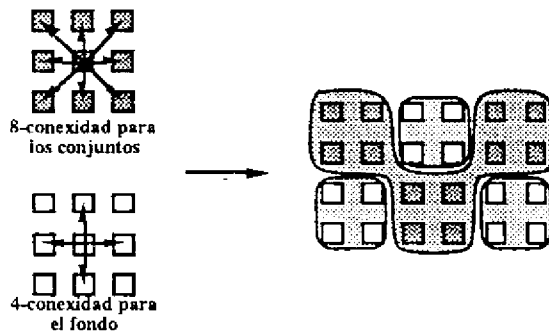
- En la práctica, se utilizan tres reglas.

**8 conexidad para los conjuntos**

**4 conexidad para el fondo**

Propiedades:

- Invariante por translación
- No autodual.

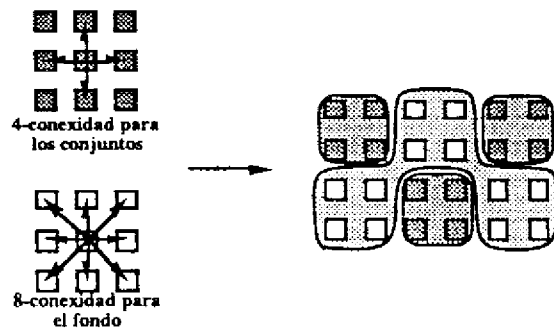


## Conexidad en malla cuadrada (II)

4 **conexidad para los conjuntos**  
8 **conexidad para el fondo**

Propiedades:

- Invariante por translación
- No autodual.

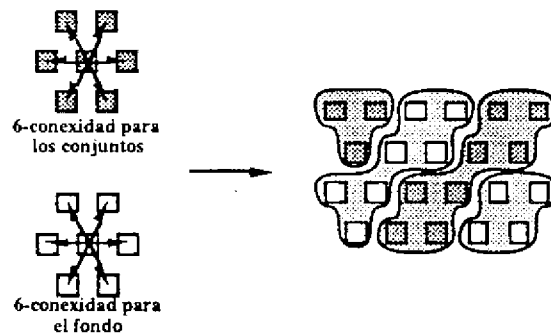


## Conexidad en malla hexagonal

6 **conexidad para los conjuntos**  
6 **conexidad para el fondo**

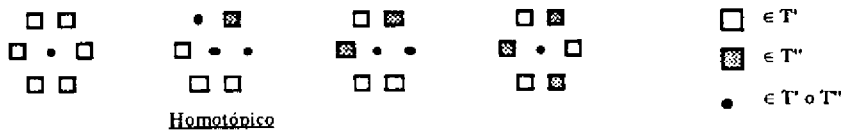
Propiedades:

- Invariante por translación
- Autodual.



## "Thinning" y "Thickenning" homotópicos

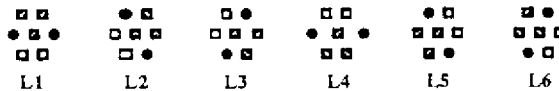
- Un "thinning" o un "thickenning" es homotópico si utiliza un elemento estructurante  $T=(T,T')$  que preserve la homotopía.
- En el caso de malla hexagonal, existen cuatro tipos de elementos (todos los otros elementos se definen a partir de estos cuatro tipos con rotación, simetría y complementación):



- La modificación del punto central preserva la homotopía si y sólo si el contorno del elemento tiene un único cambio de "0" a "1". Esta propiedad se cumple sólo para los elementos del segundo tipo.

## "Thinning" y "Thickenning" secuenciales

- En la práctica, los "thinning" o "thickenning" se utilizan de forma secuencial. Por ejemplo, dado un "elemento estructurante"  $L=(L',L'')$ , se hacen varios "thinning" con todas las rotaciones del elemento y se repite la transformación hasta la idempotencia:

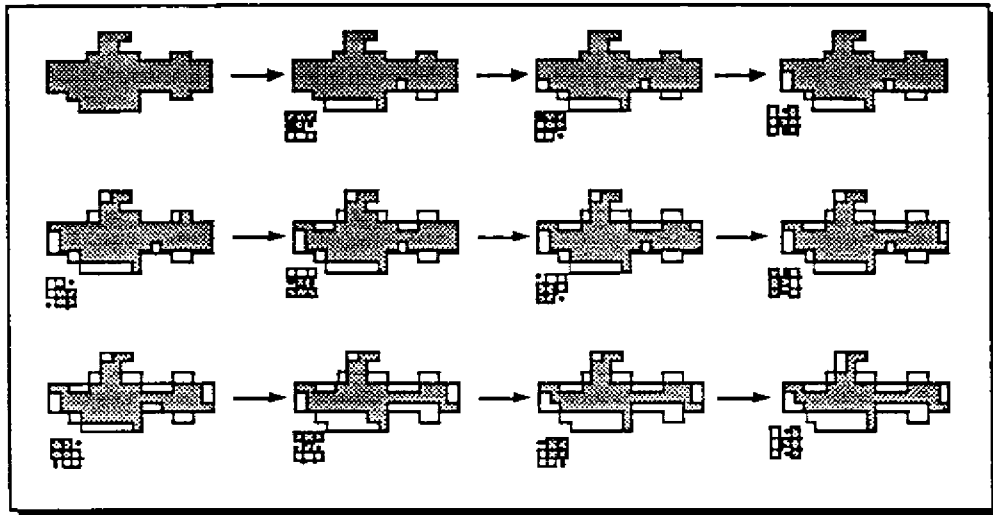


$$\left( \text{Thin}_{L_1} \dots \left( \text{Thin}_{L_6} \left( \text{Thin}_{L_6} \right) \right) \right)^n$$

- Para un  $n$  suficientemente grande, el resultado del "thinning" secuencial es anti-extensivo, idempotente y preserva la homotopía.



### Ejemplo de "Thinning" secuencial









### Propiedades de los "thinning" secuenciales

- El resultado no siempre es estrecho. Por ejemplo, el conjunto siguiente no se modifica por "thinning" con los elementos del ejemplo anterior:



- La elección del elemento de inicio y del orden de la serie de elementos influye en el resultado final.
- Los "thinning" no son muy robustos. Esta falta de robustez se traduce en numerosas ramificaciones que dependen fuertemente del elemento estructurante.

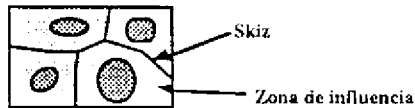
## Ejemplos de elementos estructurantes

Elemento estructurante	Thinning secuencial	Thickening secuencial	Hit or miss	
L		Esqueleto de la forma	Esqueleto del fondo	Homotópico
M		Esqueleto de la forma con ramificaciones	Thickening a partir de puntos aislados	
D		Marcador homotópico	Envolvente casi-convexa	
E		Poda del esqueleto	Poda del fondo	No homotópico
F			Puntos triples	
I			Puntos aislados	

## El esqueleto por zonas de influencia: SKIZ

**Propósito:**

- La zona de influencia de una componente X es el conjunto de puntos que están mas cerca de X que de cualquier otra componente.
- El SKIZ es la frontera de las zonas de influencia.




**Construcción:**

- En el caso digital, el SKIZ se construye en dos etapas:
  - 1) "Thinning" del fondo (con L en el caso hexagonal)
  - 2) Poda del resultado del "thinning" (con E en el caso hexagonal)



**IMAGE SEGMENTATION  
BY  
MORPHOLOGICAL METHODS**

S. Beucher  
J. Serra

  
CENTRE DE MORPHOLOGIE  
MATHÉMATIQUE  
Ecole des Mines de Paris  
35 rue St-Honoré 77300 Fontainebleau  
France  
Tel: (1)-64 69 47 06

**PLAN**

**A. Introduction**

- Historical review
- Binary example and discussion
- Beucher paradigm

**B. The tools**

- Extrema of a function
- Divide lines and watersheds
- Gradient and homotopy

**C. Examples**

- Electrophoretic gels
- Holographic images
- Ground layout extraction
- Road extraction

# SEGMENTATION IN MATHEMATICAL MORPHOLOGY (by watershed)

## A. INTRODUCTION

- Historical review
- Binary example and discussion
- Beucher paradigm

### Historical review

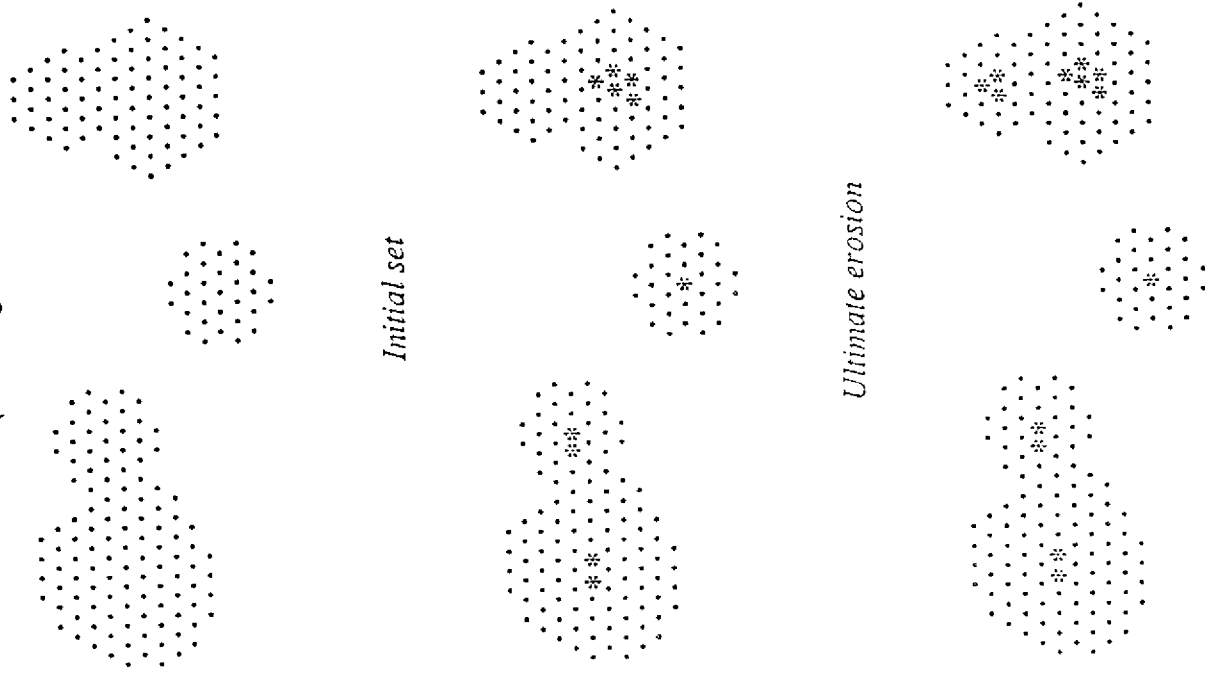
S.BEUCHER L.LANTUEJOU	} Definition, first morphological algorithm for the watersheds, use to segment images, geodesic methodes for binary images( 1979)
S.BEUCHER F.MEYER	} Introduction of markers, homotopic changes (1982)
F.MAISONNEUVE F.MEYER S.BEUCHER P.SOILLE F.FRIEDLANDER L.VINCENT M.GRIMAUD	} several applications, alternative algorithms for watersheds
S.BEUCHER F. MEYER	} Hierarchical approach (1981,1989), synthetic comparison of the various algorithms (1990), applications to motion, color, compression

## General Segmentation Methodology

*Purpose: to bring out a general approach  
to segmentation by morphological methods*

1. Set example: particle segmentation  
      $\Rightarrow$  ultimate erosion
- \* Steps of the binary segmentation
  - marking
  - particle reconstruction
2. Generalization to grey tone images
  - (subset of) the extrema
  - gradient function
  - watersheds
3. Pertinent marking  $\Rightarrow$  good segmentation

## BINARY SEGMENTATION (Marking Phase)

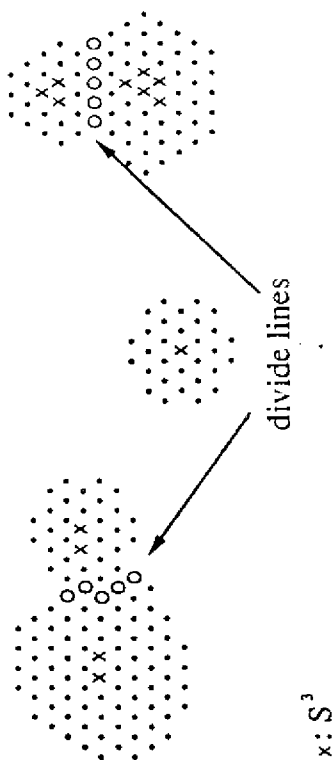


*Initial set*

*Ultimate erosion*

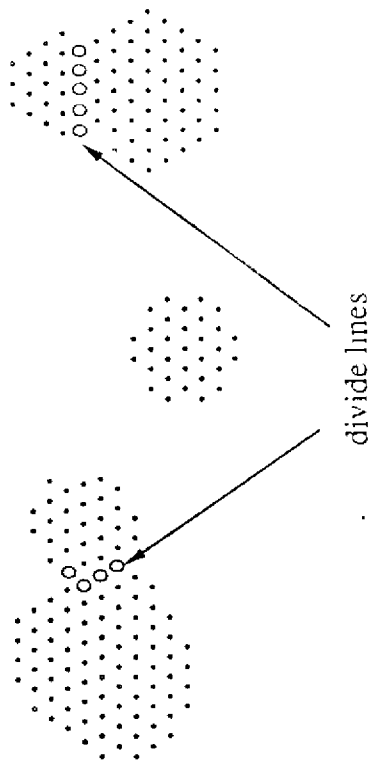
*Conditional bisector of speed 3:  $S^3(X)$*

# BINARY SEGMENTATION divide lines



[exo-skeleton of  $S^3(X) \cap X$  (wrong approach)]

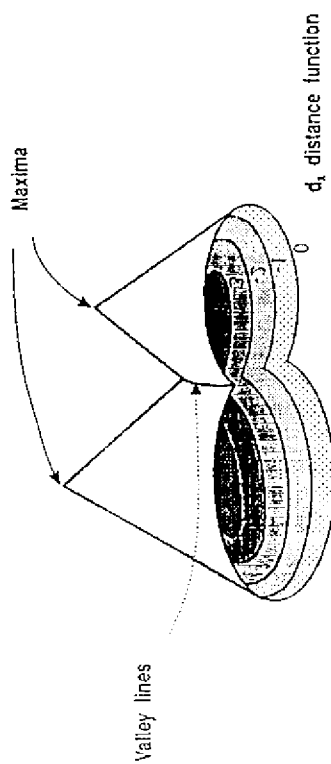
Correct approach: divide lines  
i.e. Union, as  $n$  varies, of the geodesic skirts of the  $n^{\text{th}}$  erosion inside the  $(n-1)^{\text{th}}$  erosion



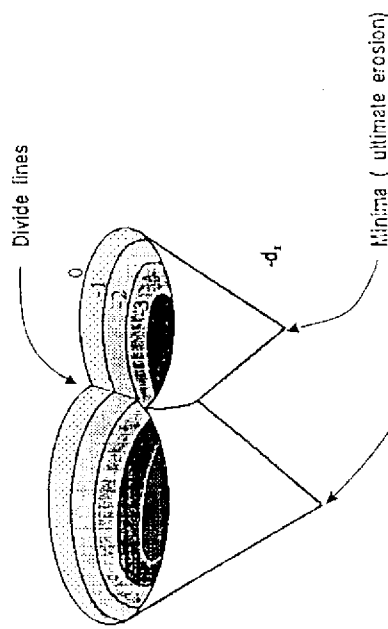
divides of  $X$  marked by  $S^3$

# BINARY SEGMENTATION (Cont.) (3-D interpretation)

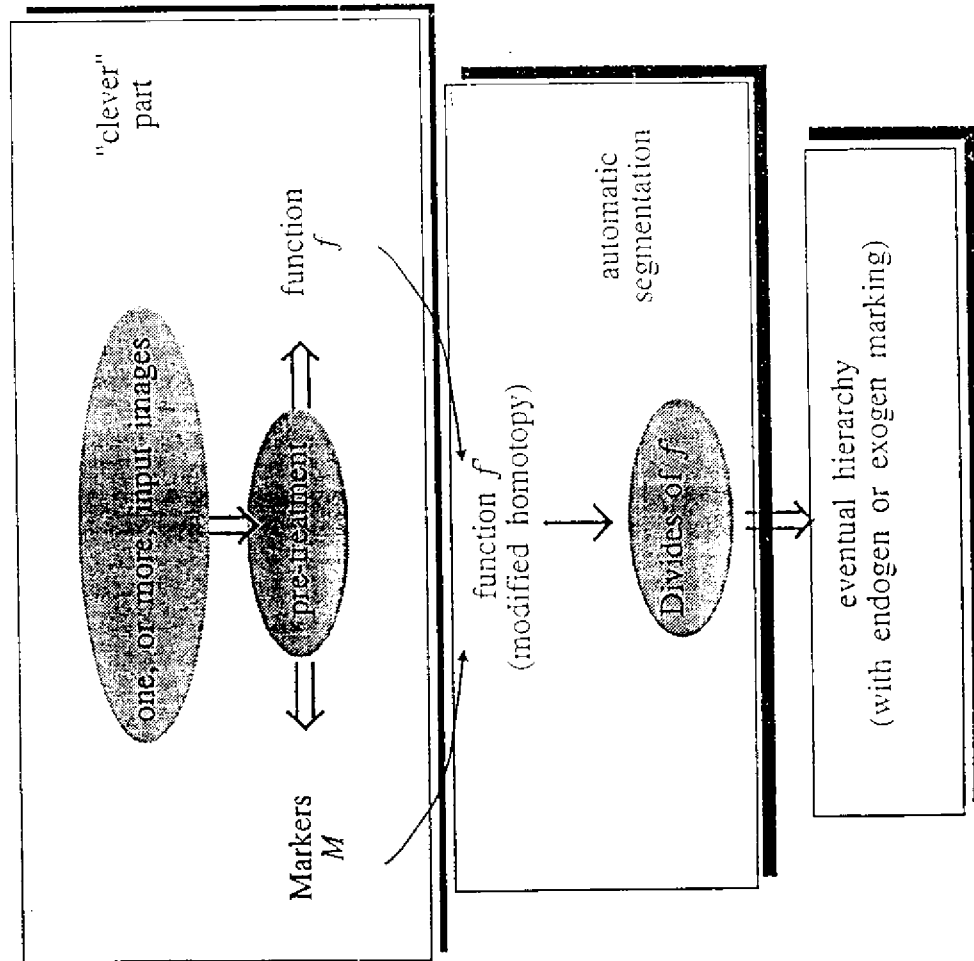
Binary morphology on set  $\equiv$  Grey morphology on the distance function



dual notions



# Beucher Paradigm for segmentation

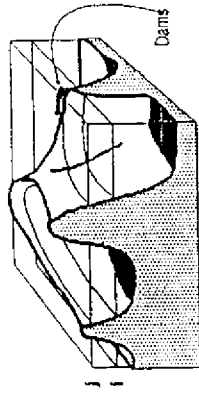


## B THE TOOLS

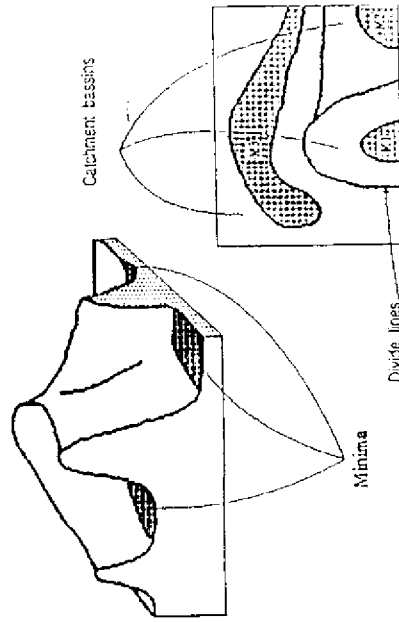
- Extrema of function
- Divide lines and watersheds
- Gradient and homotopy

# WATERSHEDS

## DEFINITIONS AND NOTATION



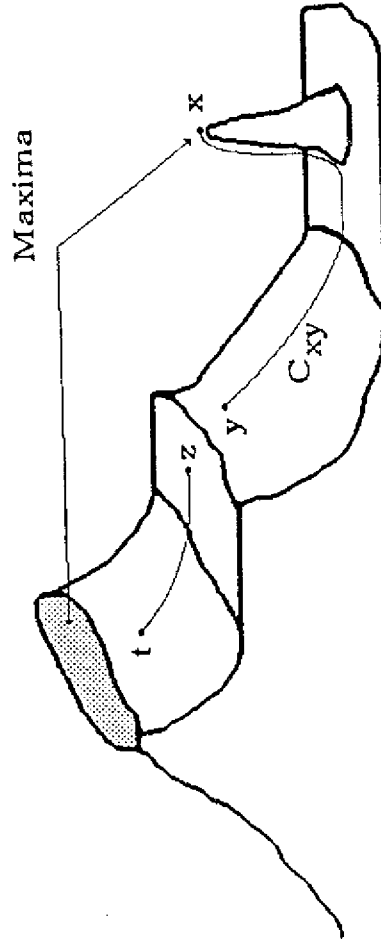
*Flooding of the relief and construction of dams*



*Regional minima, catchment basins, and divide lines*

- $f, g$
  - $RMi(f)$
  - $CB(f, RMi(f))$
  - $DL(f)$
- functions we work on  
 regional minima  
 catchment basin of  $RMi(f)$   
 divide lines of  $f$

# Minima and Maxima of a function

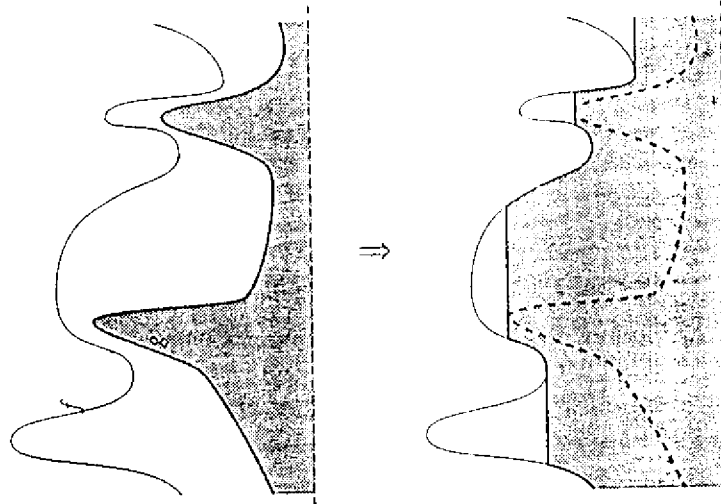


(From S. Bocher, Ph.D. Thesis, Paris-Sud, 1990)

11/15/1991 10:54 AM (GMT) COMPUTER SCREEN CAPTURE FROM THE SUN 11/15/1991 10:54 AM



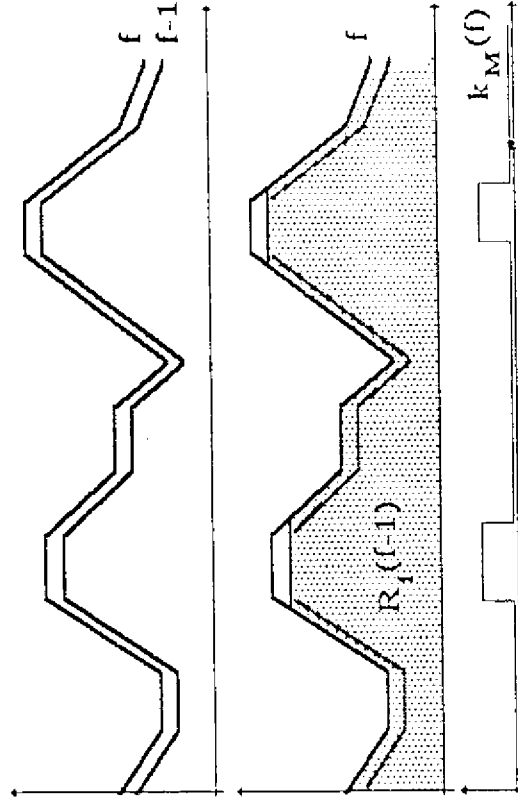
### Gray-scale reconstruction



Reconstruction of function  $f$  from the "marker-function"  $g$ :

$$R_f(g) = D_f^{(+\infty)}(g) = \lim_{r \rightarrow +\infty} D_f^{(r)}(g)$$

### Minima Extraction by rebuilding



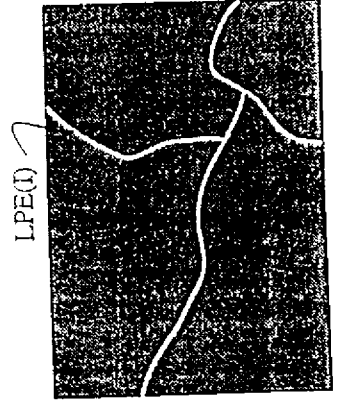
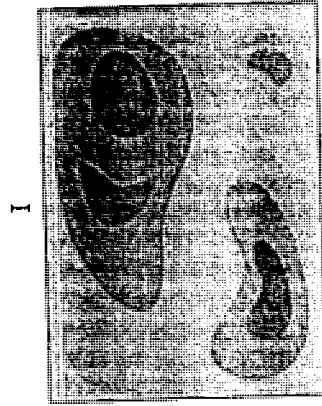
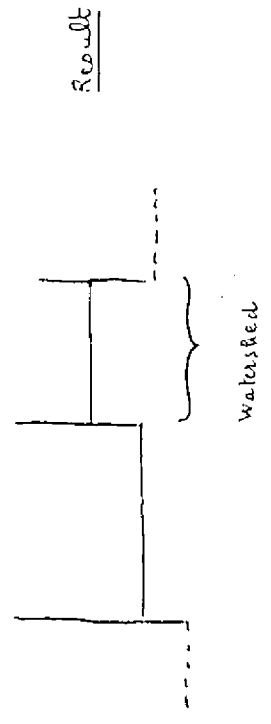
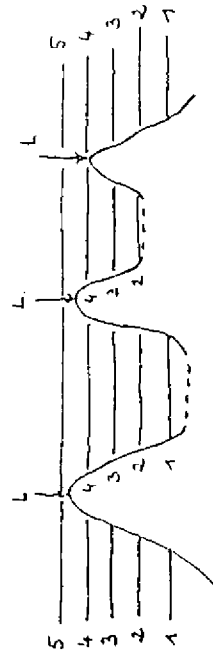
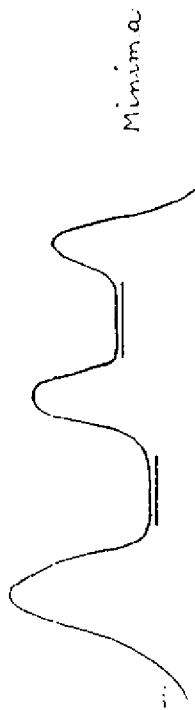
(from S. Zucker, IJCV, North-Holland, Amsterdam, 1980)

- 1)  $g = f-1$
- 2) Rebuilt of  $g$  from  $f$  (by erosion)
- 3) set of minima (characteristic function of)  $f-g$

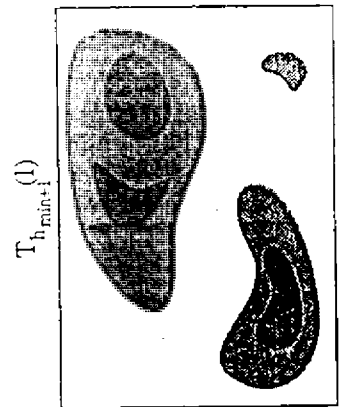
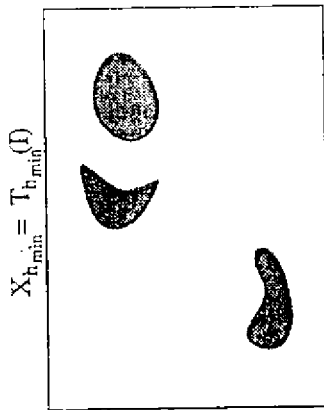
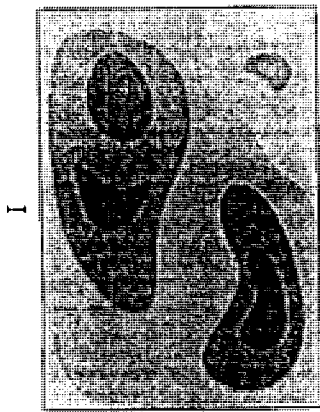
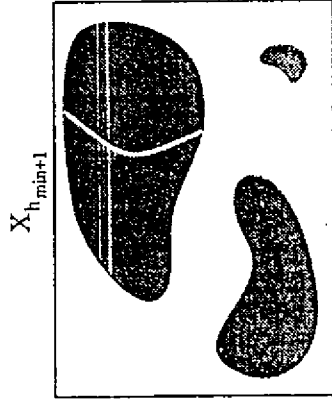
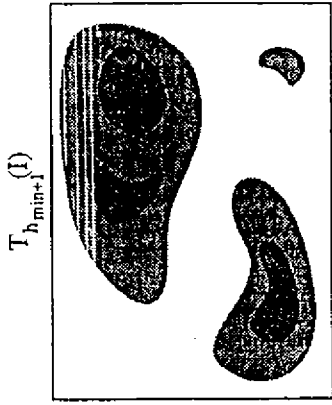
FILE: BROWNS/01 - COLOR: COMPOSITE - SCREEN: DEVICE: 4 - GRAPHIC: 21MS: TMU: JUL 13 12:57:43 1991

Divide lines of a function  
(Cont.)  
in one dimension

DIVIDE LINES ALGORITHM  
by hexagonal skiz  
(level by level approach)



FILE: page17.cdf COLOR: Composite SCREEN: Nucleus Default DIMS: 600x400 ON 10/26/92 1991



$$X_{h_{\min+1}} = \text{Min}_{h_{\min+1}} \cup \text{IZ}_{T_{h_{\min+1}}(I)}(X_{h_{\min}}).$$

# GRADIENT, HOMOTOPY and SEGMENTATION

**Since**

*HOMOGENEOUS REGIONS ⇒ MINIMUM GRADIENT*

*It is often valuable to work on the gradient image. Its divide lines will contour the objects of the initial image*

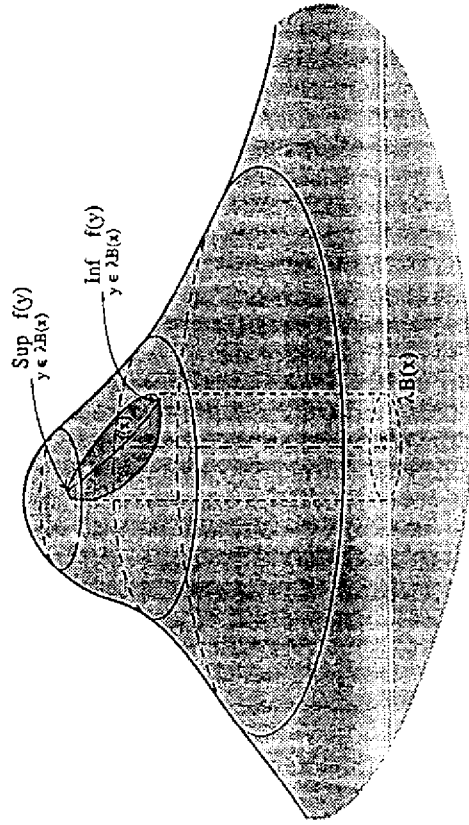
**But:**

*Risk of over-segmentation due to the noise.*

**Solution:**

*if possible, filter the gradient when filtering does not suffice, change the homotopy by inserting markers.*

## Gradients



The morphological gradient of a function  $f$  is defined by:

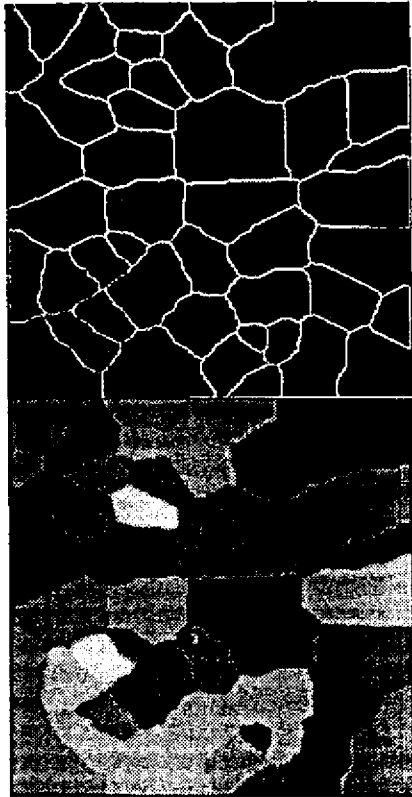
$$grad(f) = \lim_{\epsilon > 0} \frac{(f \oplus \epsilon B) - (f \ominus \epsilon B)}{2\epsilon}$$

- Remark: when  $f$  is continuously differentiable:

$$grad(f) = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

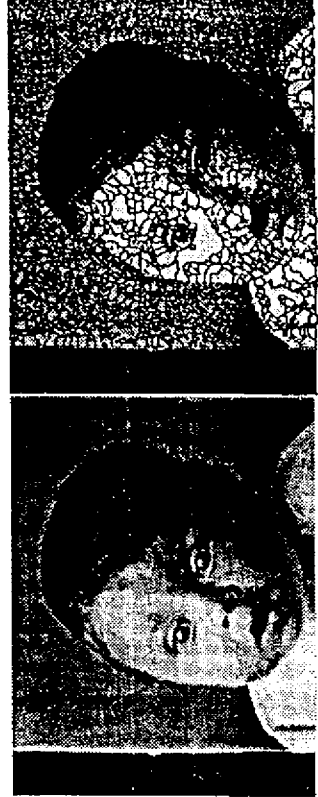
- “Dissymmetric” gradients like  $[(f \oplus \epsilon B) - f]/\epsilon$  or *directional* gradients are also useful...

# Examples of gradient divides



[From S. Beucher (PhD Thesis, Paris School of Mines 1980)]

*multiphased image (a) and divide lines of its gradient (b)*



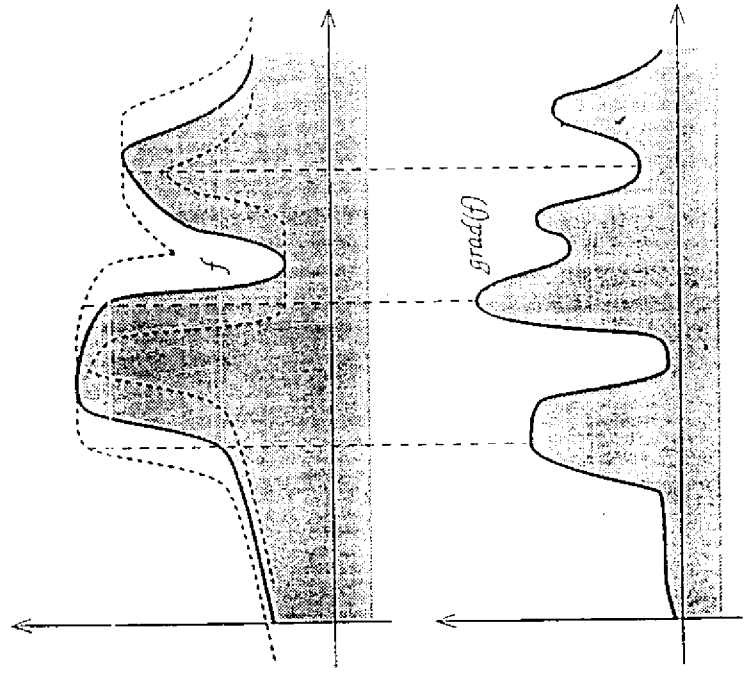
[From S. Beucher (PhD Thesis, Paris School of Mines 1980)]

*initial image (a) and divide lines of its gradient (b)*

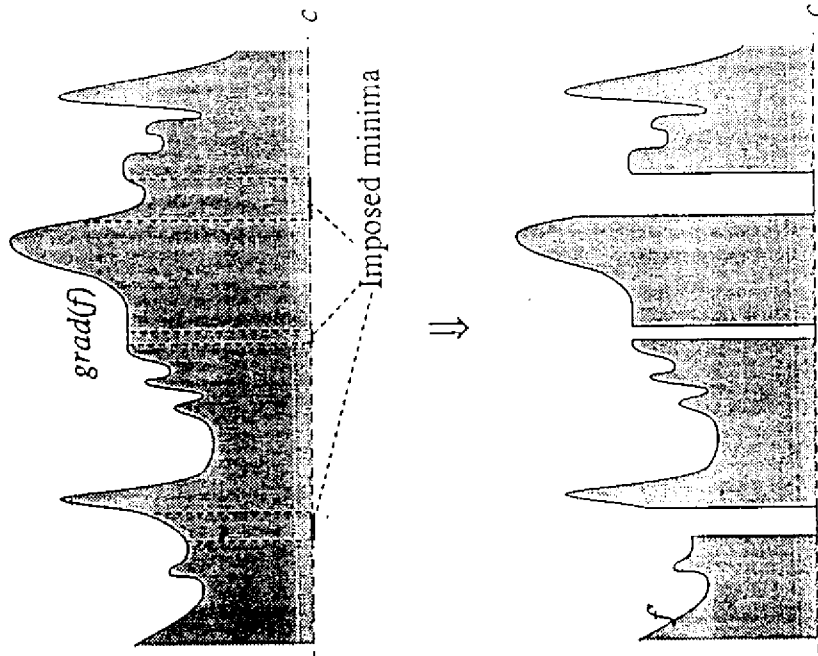
## Gradients (cont.)

Digital definition of the morphological gradient:

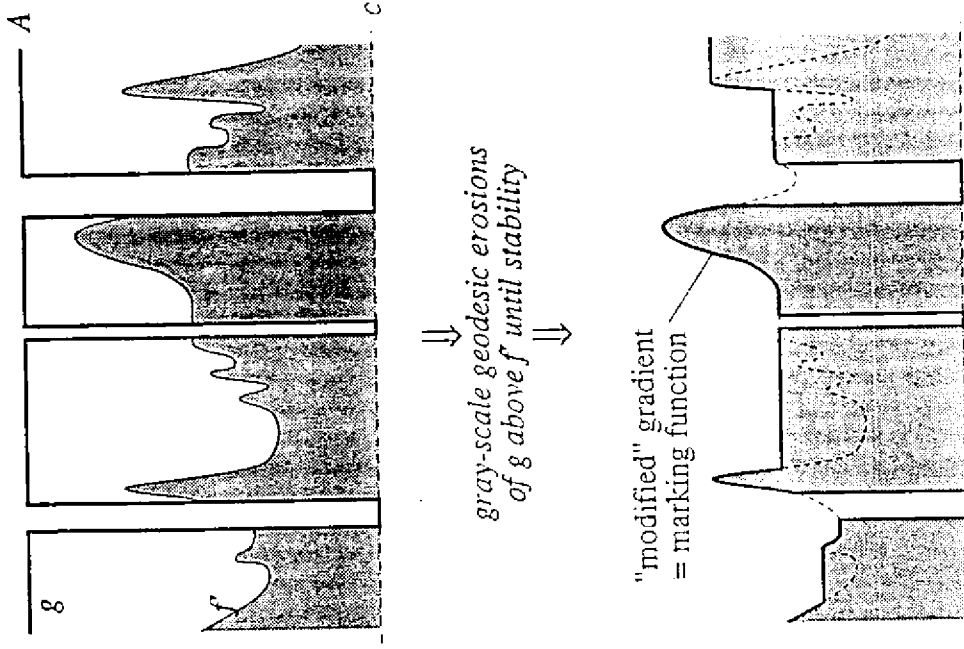
$$\text{grad}(f) = \frac{(f \oplus H) - (f \ominus H)}{2}$$



Selecting the minima of the gradient



Selecting the minima of the gradient (cont.)



$\Downarrow$  segmentation by geodesic watersheds.

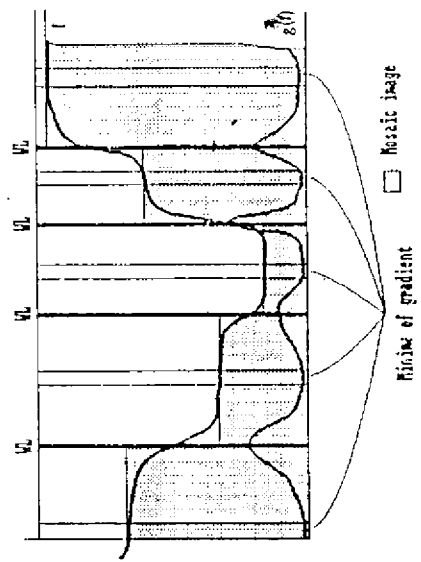
# HIERARCHICAL APPROACH TO SEGMENTATION

## 1) MOSAÏC image

**Purpose:** to obtain a simplified image (level one in the pyramid) whose classes are delimited by the contours in the original image ( level zero)

### principle of the method

- watershed of the gradient image
- catchment bassins weighting



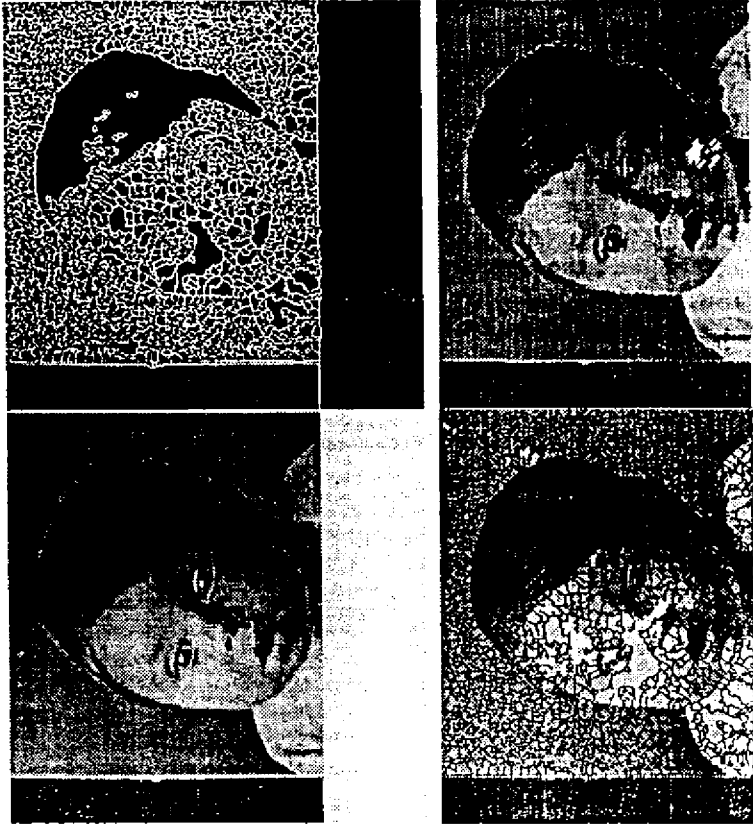
(From S. Beucher, PhD Thesis, Ecole Supérieure de Métrique, 1980)

Principle of the computation of the mosaic image

40

# HIERARCHY (cont.)

Another example of mosaic image



(From S. Beucher, PhD Thesis, Ecole Supérieure de Métrique, 1980)

(a) initial image (b) Divides of its gradient (c) valuation of the watershed (d) mosaic version

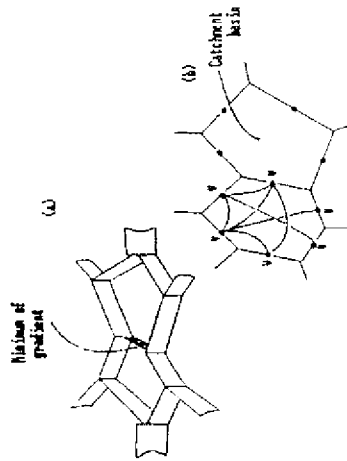
## HIERARCHY (cont.)

### 2) WATERSHEDS OF THE MOSAIC

principle of the method.

The gradient of the mosaic image is made of thin walls. Those which are lower than the surrounding ones are suppressed.

This may be interpreted as a watershed on a graph image.



(From S. Beucher 1982 Thesis, Univ. School of Mines (FR))

(a) Gradient of the mosaic image and (b) the corresponding graph used for hierarchical approach.

next level is the pyramid

From the new watershed, a new mosaic image may be computed, its gradient walls generate a new graph, hence a new watershed.

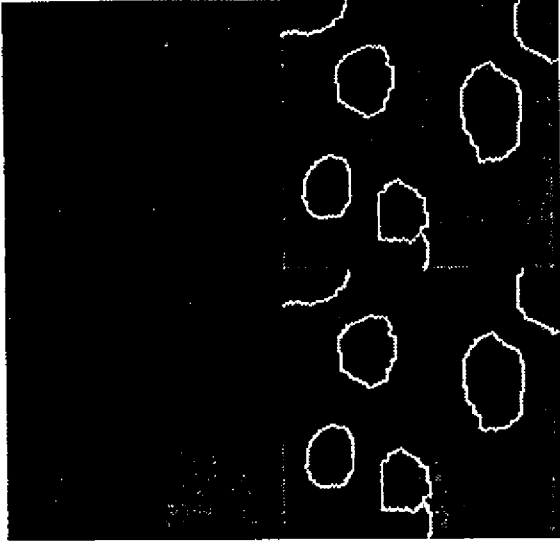
76

## C. EXAMPLES

- Electrophoretic gels (gradient)
- Cell segmentation ( few levels)
- Holograms (3-D)
- Road lanes (marking)
- Road segmentation (hierarchy)



# TUTORIAL EXAMPLE GEL-I



(From S. Beucher PhD Thesis, Paris School of Mines 1989)

- (a) Simple view of electrophoretic gel, without overlappings.
- (b) Morphological gradient of the electrophoretic gel of picture a.
- (c) Divide line of the gradient superimposed with the gradient image.
- (d) Divide line of the gradient superimposed with the original image.

## Algorithm:

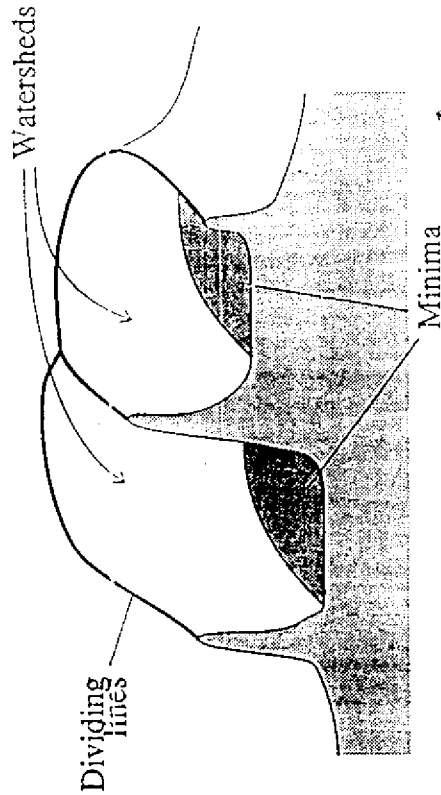
$f$  = original image.

$g = f \oplus B - f \ominus B$ ; /\* dilation minus erosion \*/

Contour =  $DL(g)$ ; /\* divide line of the gradient \*/

Each dot is of the form:  $CB(f, MR_i)$ ; /\* catchment basin of a regional minimum of the gradient function. \*/

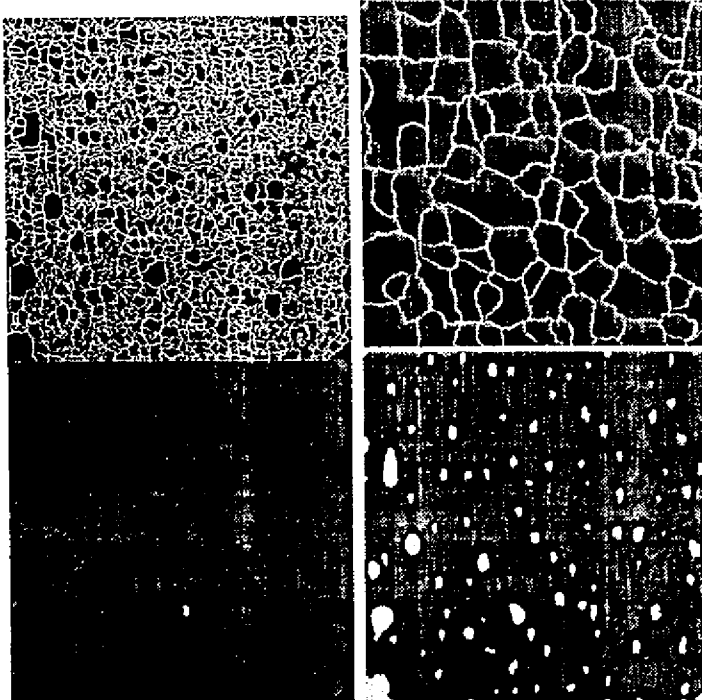
## Watersheds and segmentation



74

# REAL EXAMPLE GEL II

Purpose: segmentation, zone of influence, neighbours

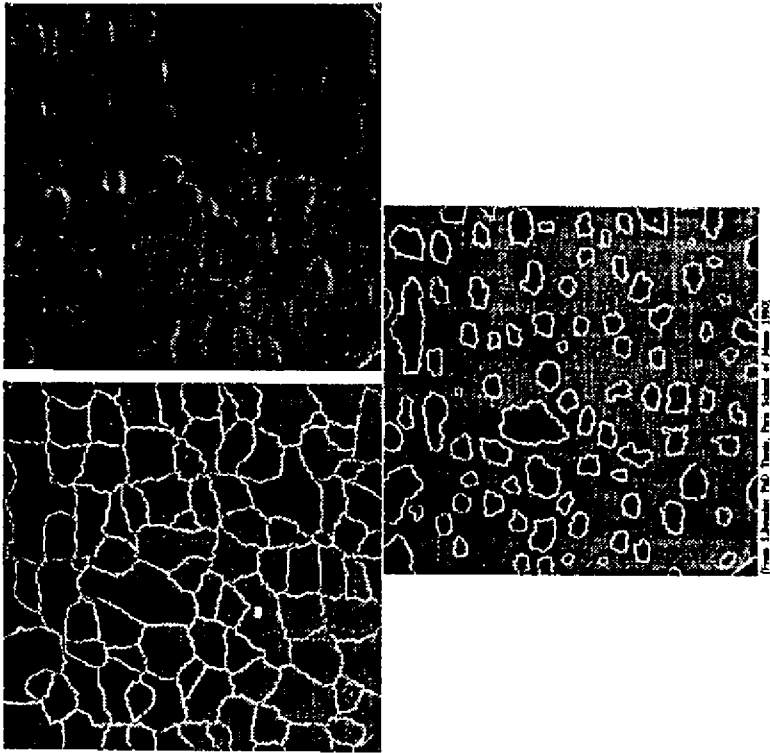


From S. Beucher PhD Thesis, Paris School of Mines (1990)

- (a) initial image of the electrophoresis gels
- (b) oversegmentation of the watershed
- (c) regional minima (inner markers)
- (d) divide line of the initial function (outer markers)

78

# GEL II



- (e) union of outer and inner markers.
- (f) morphological gradient.
- (g) final result of the segmentation.

## Algorithm:

- f = original image (Picture 3a)
- g =  $f \oplus B - \ominus B$ ; /\* dilation minus erosion \*/ (Picture 3f)
- Inside\_markers = Mr(f); (Picture 3c)
- Outside\_markers = DL(f); (Picture 3d)
- Markers = Inside\_markers  $\cup$  Outside\_markers; (Picture 3e)
- Contour = DL(f, markers); /\* divide line of the gradient associated with the markers \*/ (Picture 3g)
- Each dot is of the form: CB (g, Inside\_markers | Markers); /\* catchment basin of a regional minimum of the original function within the gradient function \*/

## Referencias comentadas:

El propósito de estas referencias comentadas es dar al lector interesado los medios para profundizar en sus conocimientos sobre morfología matemática. Siguiendo el plano del curso, se comentan las referencias originales (subrayadas) más algunas referencias más recientes, accesibles o simples.

### Capítulo I:

La morfología matemática tiene dos raíces: la álgebra de los retículos y la geometría aleatoria. Como tal, ha nacido durante los años 60 a partir de los trabajos de G. Matheron y J. Serra, y más generalmente de la Escuela de Fontainebleau. Tres obras fuertes marcan la morfología: La referencia [21] trata esencialmente el caso de los conjuntos (cuadro topológico, conjuntos aleatorios, modelo booleano, convexidad, granulometría, representación de las aplicaciones crecientes por dilataciones), la referencia [38] (extensión a las funciones numéricas, morfología digital, thinning/thickening, combinaciones de operadores) se limita al caso invariante por traslación, y la referencia [40] donde por primera vez el método se define en su marco natural de retículo (generalización de las dilataciones, granulometría, conexidad, esqueleto, teoría del filtrado morfológico, funciones booleanas). Se debe a estas tres obras, principalmente a las dos últimas, el haber hecho salir la morfología de un círculo de iniciados en los años 80.

Además de este curso, se encontraran algunas referencias de buenos artículos de divulgación: [4], [41], [6], [39], [11], [18], [19].

### Capítulo II:

La dualidad entre dilatación y erosión está indicada por primera vez en la obra de Gallois en [7]. De forma independiente, el concepto de conjuntos paralelos (es decir de función distancia euclidiana) aparece para conjuntos convexos en Steiner [46] en 1840. Minkowski [28], en 1901, define y estudia la dilatación como se presenta en el curso en II, pero curiosamente no introduce la erosión que es introducida por Hadwiger [10], en 1957.

El estudio de las propiedades específicas de las dilataciones binarias en función de la geometría de sus elementos estructurantes remonta a [9], [35], [36]. La extensión a las funciones numéricas, empezada en [31], [37] y [22], toma forma en [38] (Cuadro semi-continuo, elemento estructurante plano) y [47], [49] (elemento estructurante no plano). Las propiedades de las transformaciones planas (curso II) han sido estudiadas en detalles en [38], [12], [44], [45].

Finalmente, la transformación de distancia ha sido introducida en el caso digital en 1966 [29], y euclidiana en 1967 [20]. Muchos algoritmos de cálculo de esta función han sido propuestos [25], [50], [5].

### Capítulo III:

Las nociones de apertura-cierre morfológico y de granulometría asociada en el caso binario e invariante por traslación, vienen de [20] en 1967. En 1975, la referencia [21] ha relacionado las aperturas morfológicas y algebraicas (estas últimas son debidas a Moore en los años 20), y ha generalizado la noción de granulometría pero siempre en el caso de conjuntos. Las extensiones a funciones numéricas son presentadas en [22], [38], [47]. La apertura conexa, como equivalente a la definición de la conexidad, se encuentra en [40]. La apertura por reconstrucción (curso III.a) se encuentra en [27] para modificar la homotopía y en [33] en el cuadro de la multiresolución. La apertura de contraste (curso III.13) se encuentra en [8]. Los algoritmos geodesicos (curso II y III.a) son debidos a [13]. La teoría correspondiente es desarrollada en [16] y [1]. Para más detalles sobre los espectros granulometricos, ver [38] y [17].

La noción de filtrado morfológico (curso Filtros: caso general III.b) derivan de [40, Capítulos 5-10]. Una presentación más simple se puede encontrar en [41]. Finalmente, se puede citar [48] para los filtros alternados secuenciales (curso III.b) y [26] para el aumento de contraste (curso III.b).

### Capítulo IV:

El curso presenta de forma nueva, con la denominación "residuos", conceptos que parecían lejos y que han sido introducidos en épocas diferentes:

El gradiente morfológico y el "Top hat" plano han aparecido por primera vez en 1977 [22]. En [1], se encuentran versiones más sofisticadas del gradiente, y en [47], se encuentra la primera versión del "Top hat" no plano (ver también [40], [49]). La extensión del "Top hat" presentada al fin de IV.a esta en [32].

La erosión última ha sido introducida en [38], la bisectriz condicional en [13] y [24], la fórmula del esqueleto en [14], [15] (caso digital) y [43] (caso general). Se ha escrito mucho sobre el concepto de esqueleto, que parte originalmente de [2]. El estudio teórico del esqueleto se puede encontrar en [40, Capítulo 11-12]. La transformación "Hit and Miss" procede de [34] en 1965. Se ha utilizado para los "thinning y thickening" en [30] y [15]. El estudio sistemático de los "thinning" digitales hexagonales han sido hecho en [38]. Finalmente, se encontrará en [42] la primera síntesis sobre los residuos donde se reagrupan las nociones de erosión última, de esqueleto y de bisectriz condicional.

#### Referencias:

- [1] S. Beucher, Segmentation d'images et morphologie mathématique, PhD Thesis, Paris School of Mines, Paris, June 1990.
- [2] H. Blum, An associative machine for dealing with the visual fields and some of its biological implications, *Biol. Prot. and Synth. Syst. 1*, pp 244-260, 1962.
- [3] J.L. Chermant (Ed.), Quantitative analysis of microstructures in material sciences, biology and medicine, Special issue of Practical Metallography, Riederer-Verlag, Stuttgart, 1978.
- [4] M. Coster and J.L. Chermant, Précis d'analyse d'image, 2<sup>nd</sup> Ed., Presses du CNRS, France, 1989.
- [5] P.E. Danielson, Euclidean distance mapping, *CVGIP*, Vol. 14, 1980, pp. 227-248.
- [6] E. Dougherty, Introduction to morphological image processing, SPIE, 1992.
- [7] G. Gierz, K.H. Hofman, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove and D.S. Scott, A compendium of continuous lattices, *Springer-Verlag*, Berlin, 1980.
- [8] M. Grimaud, New measure of contrast: dynamics, SPIE Vol 1769, July 1992.
- [9] A. Haas, G. Matheron and J. Serra, Morphologie mathématique et granulométries en place, *Annales des Mines*, No XI, pp. 736-753, No XII, pp 767-782, 1967.
- [10] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin, 1957.
- [11] R.M. Haralick, S.R. Sternberg and X. Zhuang, Image analysis using mathematical morphology, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI 9, N° 4, July 1987, pp. 532-550.
- [12] H.J.A.M. Heijmans, Theoretical aspects of gray-level morphology, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, 1991.
- [13] J.C. Klein, Conception et réalisation d'une unité logique pour l'analyse quantitative d'images, Thesis, University of Nancy, France, 1976.
- [14] C. Lantuéjoul, La squelettisation et son application aux mesures topologiques des mosaïques polycristallines, PhD. Thesis, Paris School of Mines, France, 1978.
- [15] C. Lantuéjoul, Skeletonization in quantitative metallography, in *Issues of Digital Image Processing*, (R.M. Haralick and J.C. Simons, Eds), Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- [16] C. Lantuéjoul and S. Beucher, On the use of geodesic metric in image analysis, *Journal of Micro.*, No 121, pp.39-49, 1981.
- [17] P. Maragos, Pattern spectrum of images and morphological shape-size complexity, *Proc. of ICASSP*, April, 1987.
- [18] P. Maragos and R.W. Schafer, Morphological filters - Part I: Their set-theoretic analysis and relations to linear shift-invariant filters, in *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, ASSP 35, No8, August 1987, pp. 1153-1169.
- [19] P. Maragos and R.W. Schafer, Morphological filters - Part II: Their relations to median, order statistics and stack filters, in *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, ASSP 35, No8, August 1987, pp. 1170-1184.
- [20] G. Matheron, *Éléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson, Paris, 1967.
- [21] G. Matheron, *Random sets and integral geometry*, Wiley, New-York, 1975.
- [22] F. Meyer, Contrast feature extraction, in [3], 1977.
- [23] F. Meyer, *Cytologie quantitative et morphologie mathématique*, PhD Thesis, Paris School of Mines, 1979.
- [24] F. Meyer, Quantitative analysis of the chromatin of lymphocytes an essay on comparative structuralism, *Blood Cells*, No 6, 1980.
- [25] F. Meyer, Skeletons and perceptual graphs, *Signal Processing*, Vol. 16, No 4, pp. 335-363, April 1989.
- [26] F. Meyer and J. Serra, Contrasts and activity lattice, *Signal Processing*, Vol. 16, No 4, April 1989.
- [27] F. Meyer and S. Beucher, Morphological segmentation, *Journal of Visual Communication and Image Representation*, Vol. 1, No 1, September 1990.
- [28] H. Minkowski, Volumen und oberfläche, *Math. Ann.*, Vol. 57, pp. 447-495, 1903.
- [29] A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz, Sequential operations in digital picture processing, *Journal of the assoc. for Comp. Mach.*, Vol. 13, No 4, pp. 471-494, 1966.
- [30] A. Rosenfeld, Connectivity in digital pictures, *Journal of the assoc. for Comp. Mach.*, Vol. 17, No 1, pp. 146-160, 1970.
- [31] A. Rosenfeld and A.C. Kak, *Digital picture processing*, Academic Press, New-York, London, 1976.

- [32] P. Salembier, Multiscale image analysis and modeling using rank order based filter - application to defect detection, PhD Thesis, EPFL, Lausanne, June 1991.
- [33] P. Salembier and M. Kunt, Size-sensitive multiresolution decomposition of images with rank order based filter, *Signal Processing*, Vol. 27, No2, May 1992.
- [34] J. Serra, L'analyse des textures par la géométrie aléatoire, *Compte rendu du Comité Scientifique de l'IRSID*, 1965.
- [35] J. Serra, Introduction à la morphologie mathématique, Internal note, Paris School of Mines, Paris, 1969.
- [36] J. Serra, Stereology and structuring elements, *Journal of Micr.*, Part 1, pp. 93-103, 1972.
- [37] J. Serra, Morphologie pour les fonctions à peu près tout ou rien, *Technical Note*, Paris School of Mines, Paris, 1975.
- [38] J. Serra, Image analysis and mathematical morphology, *Academic Press*, 1982.
- [39] J. Serra, Morphological optics, *Journal of microscopy*, Vol. 145, January 1987.
- [40] J. Serra, Image analysis and mathematical morphology, Vol 2: Theoretical advances, *Academic Press*, 1988.
- [41] J. Serra and L. Vincent, Lecture notes on morphological filtering, Paris School of Mines, Paris, 1989.
- [42] J. Serra, Links: definition and properties, *Proc. SPIE*, Vol. 1360, October, 1990.
- [43] J. Serra, Skeleton decomposition, *Proc. SPIE*, Vol. 1769, July 1992.
- [44] J. Serra, Anamorphoses and function lattices, in *mathematical morphology*, Ed. E. Dougherty, Marcel Dekker, New-York, 1992.
- [45] P. Soille, J. Rivest and J. Serra, Dimensionality in image analysis and processing, *Proc. SPIE*, Vol. 1658, February, 1992.
- [46] J. Steiner, Über parallele Flächen, *Monatsber. Akd. Wiss.*, Berlin, 1840, pp.114-118.
- [47] S.R. Sternberg, Cellular computers and biomedical image processing, *Biomedical images and computers*, Eds. J. Sklansky and J. Bissconte, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [48] S.R. Sternberg, Biomedical Image Processing, *Computer*, Vol. 16, No. 1, 1983.
- [49] S.R. Sternberg, Grayscale morphology, *Computer Vision, Graphics and Image Processing, CVGIP* 35, 1986, pp. 333-355.
- [50] L. Vincent, Algorithmes morphologiques à base de file d'attente et de lacets, PhD. Thesis, Paris School of Mines, May 1990.

**MINIMAL REPRESENTATIONS  
FOR TRANSLATION INVARIANT SET MAPPINGS  
BY MATHEMATICAL MORPHOLOGY<sup>1</sup>**

Gerald J. F. BANON<sup>2</sup>  
Junior BARRERA<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup> Transparencies.

Second revised form, October 1992, to be presented, as part of a tutorial on "Overview on Mathematical Morphology", at V Simposio Brasileiro de Computacao Grafica e Processamento de Imagens (SIBGRAPI), November 9, 1992, Aguas de Lindoia - SP - Brazil.

First revised form, October 1990, presented at XIII Congresso Nacional de Matematica Aplicada e Computacional (CNMAC), November 27, 1990, Aguas de Lindoia - SP - Brazil.

The original form has been presented on September 26, 1989 at "Centre de Morphologie Mathematique de l'Ecole des Mines de Paris" in Fontainebleau - France.

<sup>2</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Image Processing Department (DPI), CP 515, 12201-970, Sao Jose dos Campos, SP, Brazil.

<sup>3</sup> Universidade de Sao Paulo (USP), Institute of Mathematics and Statistics (IME), CP. IME 20570, 01498-970, Sao Paulo, SP, Brazil.

## Transparencies

Second revised form, October 1992, to be presented, as part of a tutorial on "Overview on Mathematical Morphology", at V Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens (SIBGRAPI), November 9, 1992, Águas de Lindóia - SP - Brazil.

First revised form, October 1990, presented at XIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, November 27, 1990, Águas de Lindóia - SP - Brazil.

The original form has been presented on September 26, 1989 at "Centre de Morphologie Mathématique de l'École des Mines de Paris" in Fontainebleau - France.

## Reference

G. Banon and J. Barrera; *Minimal representations for Translation-invariant set mappings by mathematical morphology*, SIAM J. APPL. MATH., Vol. 51, No. 6, pp. 1782-1798, December 1991.

## Acknowledgments

This presentation was supported by FAPESP ("Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) under contract no. 91/3532-2.

**MINIMAL REPRESENTATIONS  
FOR TRANSLATION INVARIANT SET MAPPINGS  
BY MATHEMATICAL MORPHOLOGY**

1. INTRODUCTION
2. REPRESENTATION FOR INCREASING TRANSLATION INVARIANT MAPPINGS
3. MINIMAL REPRESENTATION FOR INCREASING TRANSLATION INVARIANT MAPPINGS
4. REPRESENTATIONS FOR TRANSLATION INVARIANT MAPPINGS
5. DUAL RESULTS
6. EXAMPLES
7. CONCLUSION



## 1. INTRODUCTION

- Elementary operations of Mathematical Morphology:

*erosion, intersection and complementation*

or, equivalently,

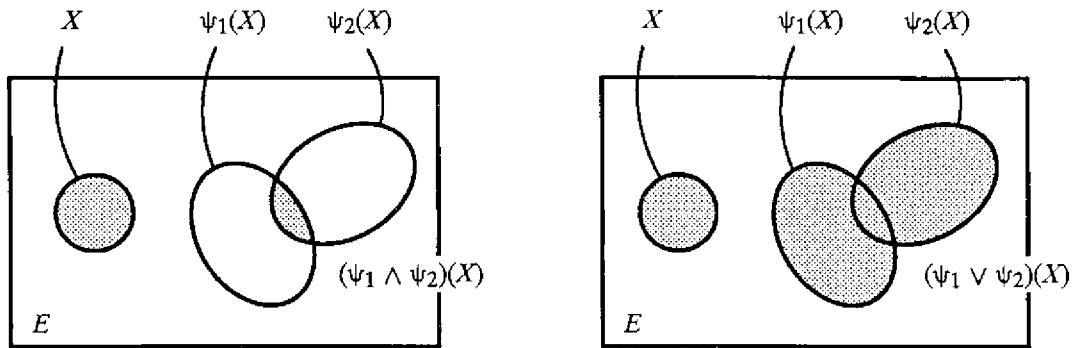
*dilation, union, and complementation.*

- Does it exist a translation invariant (t.i.) set mapping which cannot be represented by the elementary operations of Mathematical Morphology?

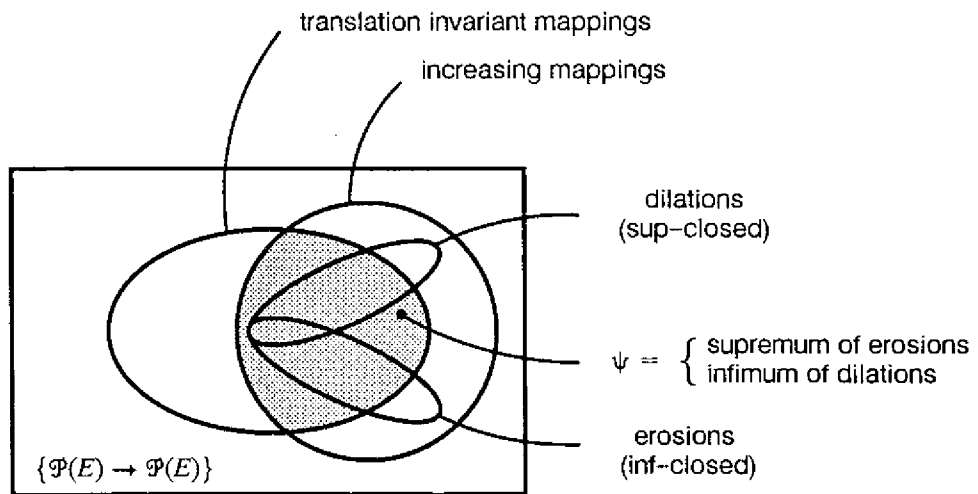
- Matheron has given a representation for the increasing t.i. mappings (1975).

- Maragos has simplified Matheron's representation (1985).

- Does it exist similar representations for t.i. mappings (not necessarily increasing)?



Infimum and supremum of two mappings.



Matheron's Theorem.

## 2. REPRESENTATION FOR INCREASING TRANSLATION INVARIANT MAPPINGS

- $E$  : d-dimensional Euclidian space.
- $o$  : null element of  $E$  (origin).
- $X^c$  : complementary of  $X$  (i.e.,  $E - X$ ).
- $\mathcal{P}(E)$  : collection of all subsets of  $E$ .
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$  : subcollection of  $\mathcal{P}(E)$ .
- $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(E)$  : mapping from  $\mathcal{A}$  to  $\mathcal{P}(E)$ .
- $\Psi_{\mathcal{A}}$  : set of all the mappings  $\psi$ .
- $<$  : partial order for  $\Psi_{\mathcal{A}}$  defined by
- $$\psi_1 < \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1(X) \subset \psi_2(X) \quad (X \in \mathcal{A}).$$
- $V$  and  $\Lambda$  : supremum and infimum in  $(\Psi_{\mathcal{A}}, <)$ .

- Let  $X \in \mathcal{P}(E)$  and  $h \in E$ .

$$X_h = \left\{ x \in E : x - h \in X \right\}$$

is the translate of  $X$  by  $h$ .

- Let  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ .  $\mathcal{A}$  is closed under translation

iff

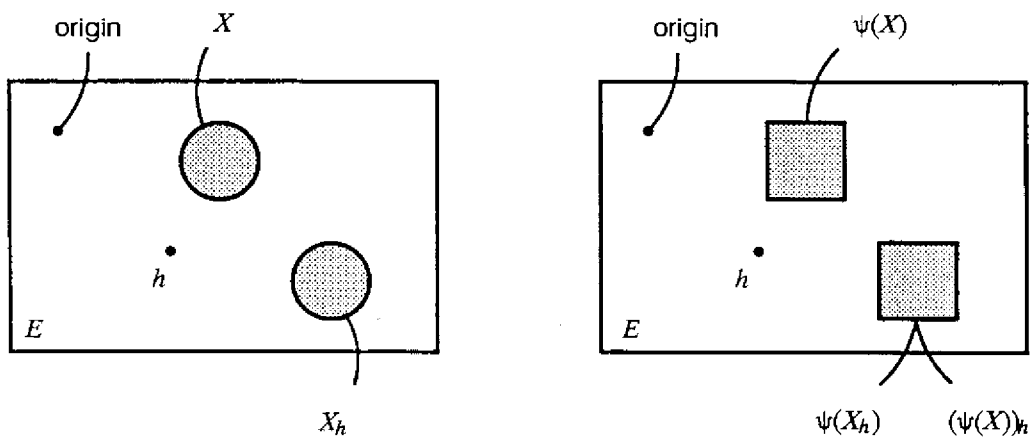
$$X_h \in \mathcal{A} \quad (X \in \mathcal{A} \text{ and } h \in E).$$

- Let  $\mathcal{A}$  be closed under translation.

$\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(E)$  is translation invariant (t.i.)

iff

$$\psi(X_h) = (\psi(X))_h \quad (X \in \mathcal{A} \text{ and } h \in E).$$



Translation invariant mapping  $\psi$ .

- Let  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(E)$  (t.i.).

$$\mathcal{K}(\psi) = \left\{ X \in \mathcal{A} : \circ \in \psi(X) \right\}$$

is the kernel of  $\psi$ .

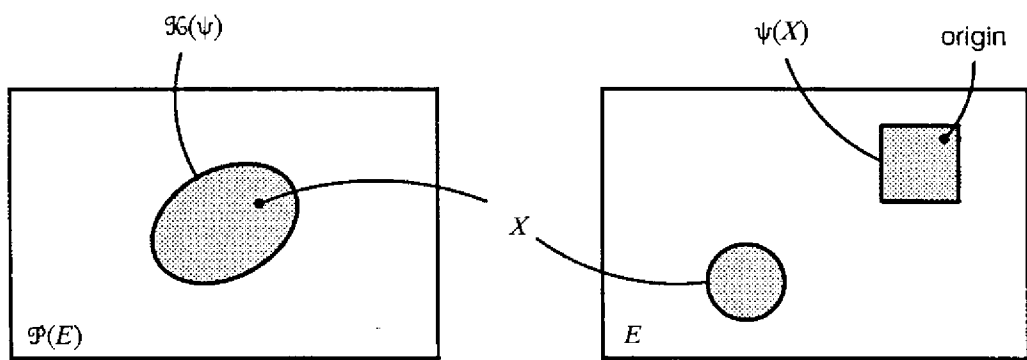
- Let  $X$  and  $A \in \mathcal{P}(E)$ .

$$X \ominus A = \left\{ y \in E : A_y \subset X \right\}$$

is the erosion of  $X$  by the structuring element  $A$  and

$$X \oplus A = \bigcup \left\{ A_x : x \in X \right\}$$

is the dilation of  $X$  by the structuring element  $A$ .



Kernel of  $\psi$ .

•  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(E)$  is increasing

iff

$$X \subset Y \Rightarrow \psi(X) \subset \psi(Y) \quad (X, Y \in \mathcal{A}).$$

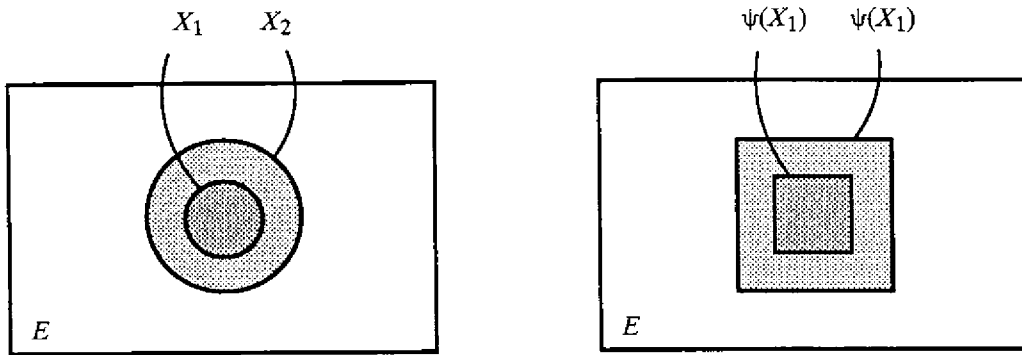
• Matheron has shown (1975) that for any *increasing* t.i. mapping  $\psi \in \Psi_{\mathcal{A}}$ ,

$$\psi = V \left\{ \cdot \ominus A : A \in \mathcal{K}(\psi) \right\},$$

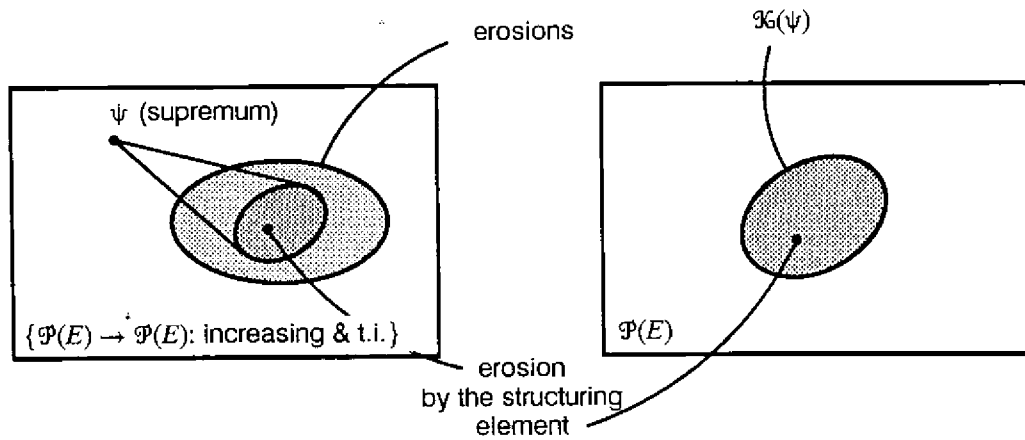
in other words,

$$\psi(X) = U \left\{ X \ominus A : A \in \mathcal{K}(\psi) \right\} \quad (X \in \mathcal{A}).$$





Increasing mapping  $\psi$ .



Matheron's Theorem - Constructive form.

• Matheron's result works for three reasons:

1.  $\mathcal{K}(\cdot)$  is a *lattice-isomorphism*, i.e.,

$\mathcal{K}(\cdot)$  is bijective and

$\mathcal{K}(\cdot)$  is increasing two-sided, i.e.,

for any t.i. mapping  $\psi_1$  and  $\psi_2$ ,

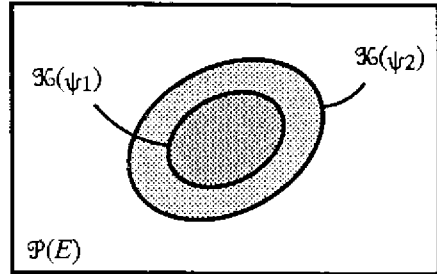
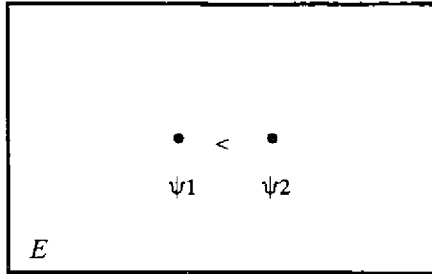
$$\psi_1 < \psi_2 \Leftrightarrow \mathcal{K}(\psi_1) < \mathcal{K}(\psi_2).$$

2. For any increasing t.i. mapping  $\psi$ ,  $\mathcal{K}(\psi)$  is a *dual-ideal* of  $(\mathcal{A}, \subset)$ , i.e., if  $X \in \mathcal{K}(\psi)$  and  $Y \in \mathcal{A}$ , then

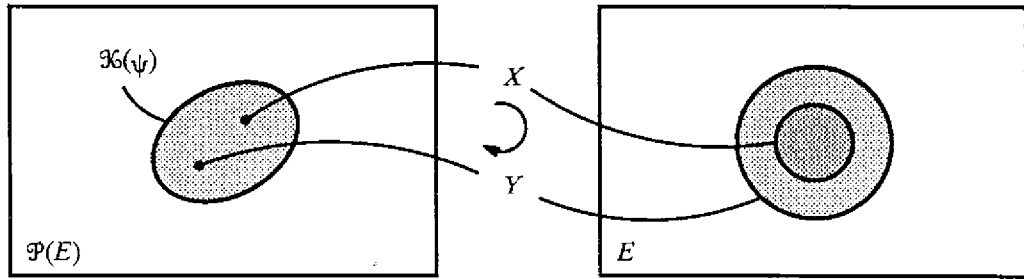
$$X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{K}(\psi).$$

3.

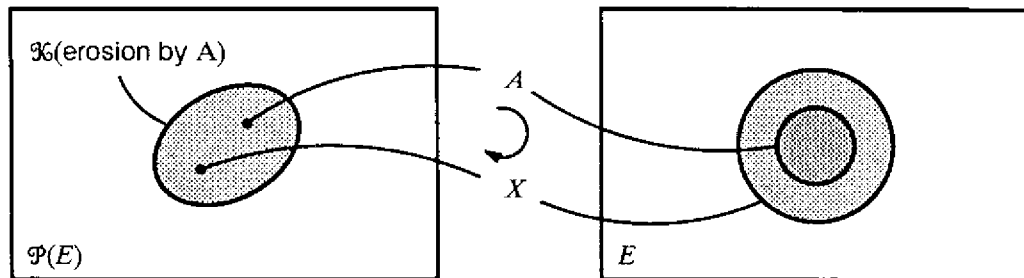
$$\mathcal{K}(\cdot \ominus A) = \left\{ X \in \mathcal{A} : A \subset X \right\}.$$



Lattice isomorphism  $\mathfrak{K}$ .



Dual ideal property of  $\mathfrak{K}(\psi)$  for increasing mapping  $\psi$ .



Kernel of an erosion by  $A$ .

### 3. MINIMAL REPRESENTATION FOR INCREASING TRANSLATION INVARIANT MAPPINGS

• Let  $\mathcal{F}$  be the subcollection of closed subsets of  $E$ , equipped with the Euclidian topology.

• Let  $\mathcal{F}^K = \{X \in \mathcal{F} : X \cap K = \emptyset\}$ , where  $K$  is compact.

• Let  $\mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{F} : X \cap G \neq \emptyset\}$ , where  $G$  is open.

- The set of the collections of the type

$$\mathcal{F}^K$$

or

$$\mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n} \quad (n \geq 1)$$

or

$$\mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n} \quad (n \geq 1)$$

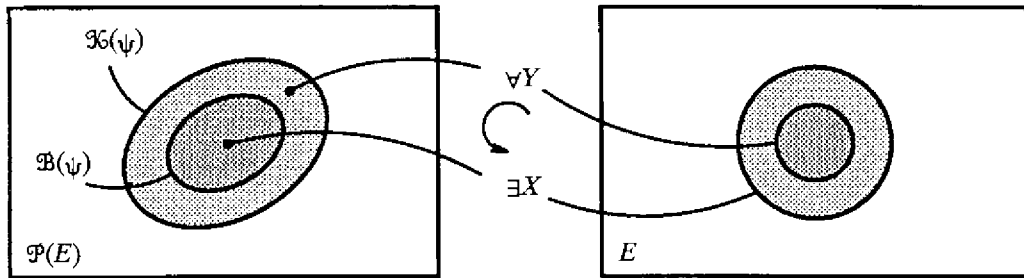
is a base for the Hit-Miss topology.

- $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  is upper semi-continuous (u.s.c.) iff, for any compact subset  $K$ ,

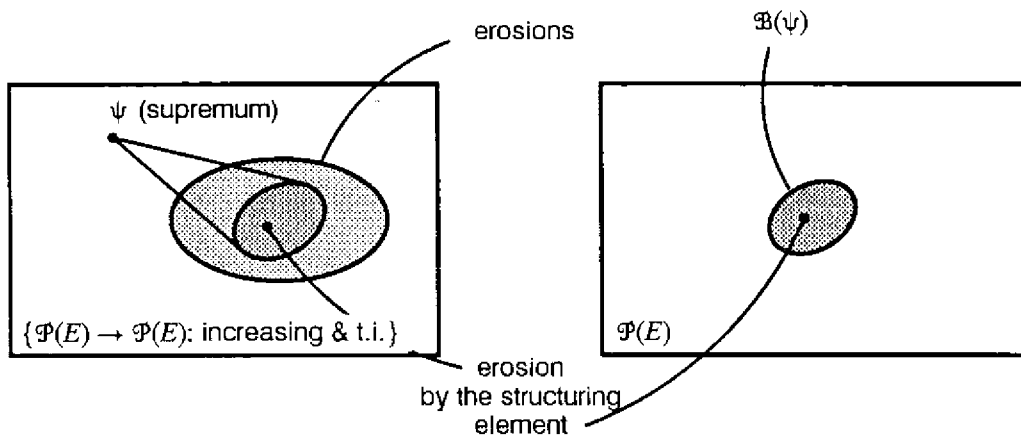
$$\psi^{-1}(\mathcal{F}^K) \text{ is open in } \mathcal{F}.$$

- Let  $(P, \leq)$  be a poset.
- $m$  is a maximal element of  $(P, \leq)$  iff  $m \in P$  and for any  $s \in P$ ,  $m \leq s \Rightarrow m = s$ .
- $m$  is a minimal element of  $(P, \leq)$  iff  $m \in S$  and for any  $s \in P$ ,  $s \leq m \Rightarrow m = s$ .
- Let  $\mathcal{B}(\psi)$  be the set of minimal elements of  $(\mathcal{K}(\psi), \subset)$ .
- $\mathcal{B}$  satisfies the representation condition for the increasing mapping  $\psi$  iff for any  $Y \in \mathcal{K}(\psi)$ ,  $\exists X \in \mathcal{B}$  such that  $X \subset Y$ .
- Maragos has shown (1985) that, for any increasing t.i. u.s.c. mapping  $\psi \in \Psi_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{B}(\psi)$  satisfies the representation condition for  $\psi$ , and

$$\psi = V \left\{ \cdot \ominus A : A \in \mathcal{B}(\psi) \right\}.$$



Representation condition for  $\psi$  applied to  $\mathfrak{B}(\psi)$ .



Maragos' Theorem.

• Maragos' result works for two reasons:

1.

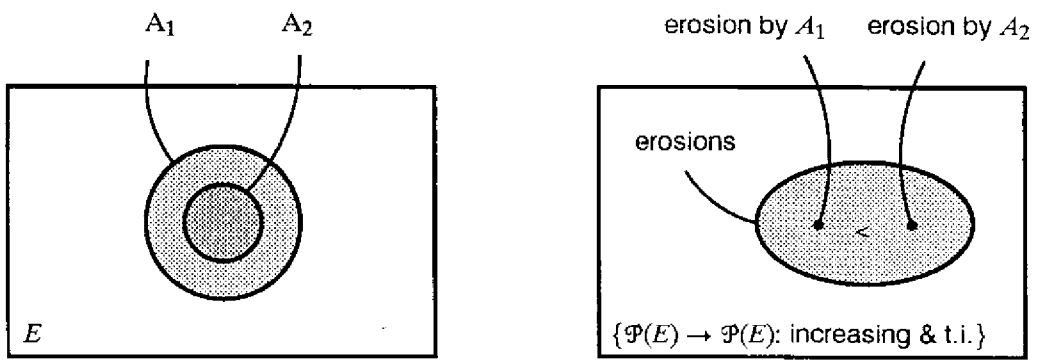
$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow (\cdot \circ A_2) < (\cdot \circ A_1).$$

2. Any linearly ordered subcollection of  $\mathcal{K}(\psi)$  has an infimum in  $\mathcal{K}(\psi)$ .

#### MARAGOS' LEMMA

• Let  $(P, \leq)$  be a poset. Let  $L$  be a linearly ordered subset of  $P$ , then there exists a maximal linearly ordered subset  $M$  of  $P$  such that  $L \subset M$ .





Erosions comparison.

#### 4. REPRESENTATIONS FOR TRANSLATION INVARIANT MAPPINGS

• Are there similar representations in terms of supremum of elementary morphological mappings for t.i. mappings (not necessarily increasing)?

• Draw back:  $K(\psi)$  is no longer a dual-ideal of  $(\mathcal{A}, c)$ .

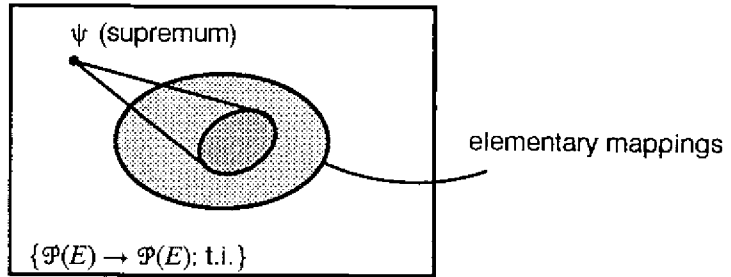
• Let  $(P, \leq)$  be a poset. Given  $a \leq b$  in  $P$ , the subset of all elements  $x \in P$  which satisfy  $a \leq x \leq b$  is called a closed interval of  $P$  and denoted  $[a, b]$ :

$$[a, b] = \{x \in P: a \leq x \leq b\}.$$

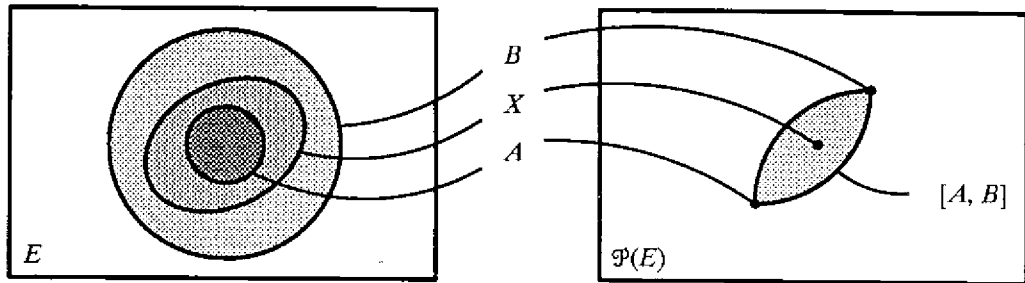
• Let  $\cdot \circlearrowleft (A, B)$  be the mapping defined by

$$X \circlearrowleft (A, B) = \left\{x \in E: A_x \subset X \subset B_x\right\} \quad (X \in \mathcal{A}).$$

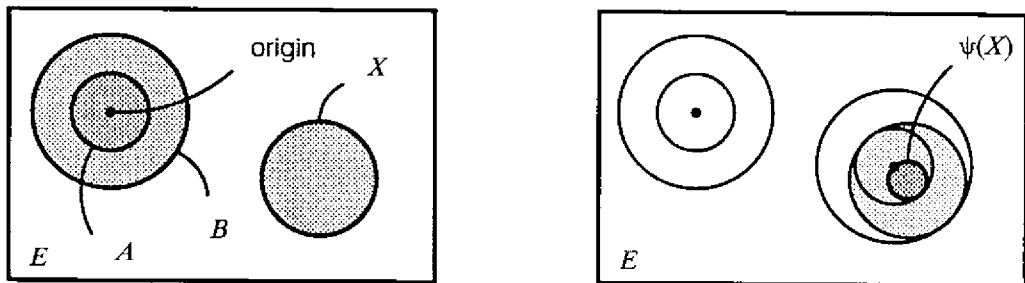
The mappings of the type  $\cdot \circlearrowleft (A, B)$  are called sup-generating mappings.



Representation Theorem.



Closed interval  $[A, B]$ .



Transformation by a sup-generating mapping  $\psi$  characterized by  $(A, B)$ .

THEOREM (Translation invariant mapping representation by a supremum)

- For any t.i. mapping  $\psi \in \Psi_{\mathcal{A}}$ ,

$$\psi = V \left\{ \cdot \otimes (A, B) : [A, B] \subset K(\psi) \right\}.$$

- This result works for three reasons:

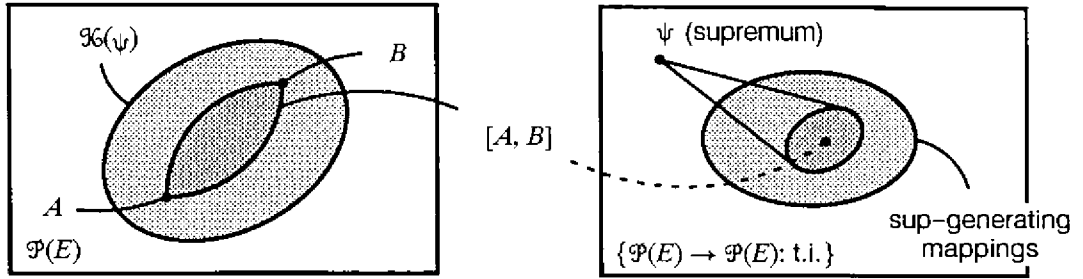
1.  $K(\cdot)$  is a lattice-isomorphism,

2. For any subset  $S$  of  $(P, \leq)$ ,

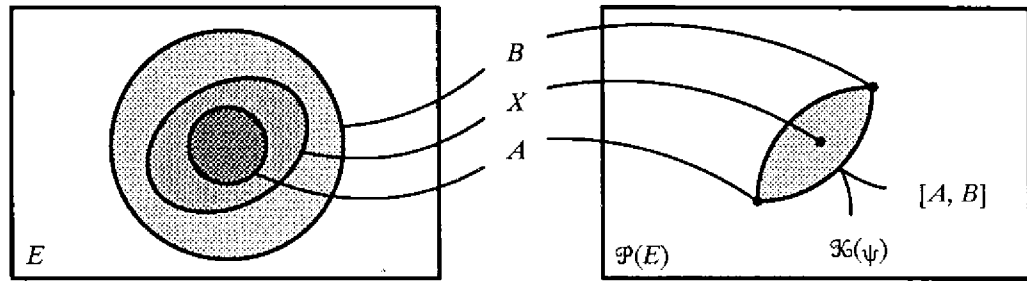
$$S = U \left\{ [a, b] : [a, b] \subset S \right\}.$$

3.

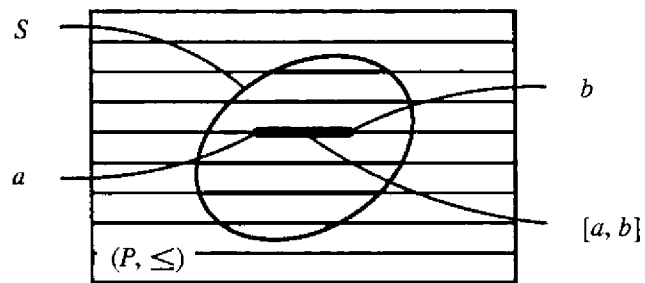
$$K(\cdot \otimes (A, B)) = \left\{ X \in \mathcal{A} : A \subset X \subset B \right\}.$$



Representation Theorem - Constructive form.



Kernel of a sup-generating mapping  $\psi$  characterized by  $(A, B)$ .



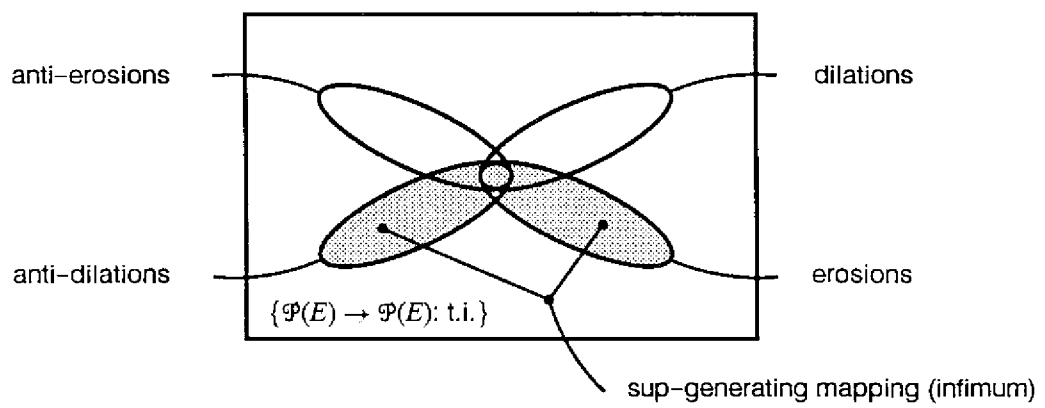
Closed interval coverage.

• The sup-generating mappings can be written as the infimum of an erosion and an antidilation

$$\cdot \otimes (A, B) = (\cdot \ominus A) \wedge (\cdot^c \ominus B^c)$$

or, in terms of the Serra's Hit-Miss transformation,

$$\cdot \otimes (A, B) = \cdot \otimes (A, B^c).$$



Sup-generating mapping.

• The set  $\mathbf{B}(\psi)$  of the maximal closed intervals contained in  $\mathcal{K}(\psi)$  is called the basis of  $\psi$ .

•  $\mathbf{B}$  satisfies the representation condition for the mapping  $\psi$  iff for any  $[U, V] \in \mathcal{K}(\psi)$ ,  $\exists [A, B] \in \mathbf{B}$  such that  $[U, V] \subset [A, B]$ .

THEOREM (Minimal representation by a supremum)

• For any t.i. u.s.c. mapping  $\psi \in \Psi_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathbf{B}(\psi)$  satisfies the representation condition for  $\psi$ , and

$$\psi = V \left\{ \cdot \otimes (A, B) : [A, B] \in \mathbf{B}(\psi) \right\}.$$

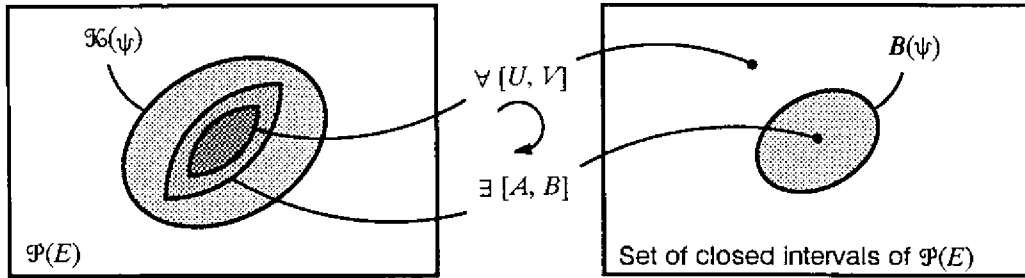
• This result works for two reasons:

1.

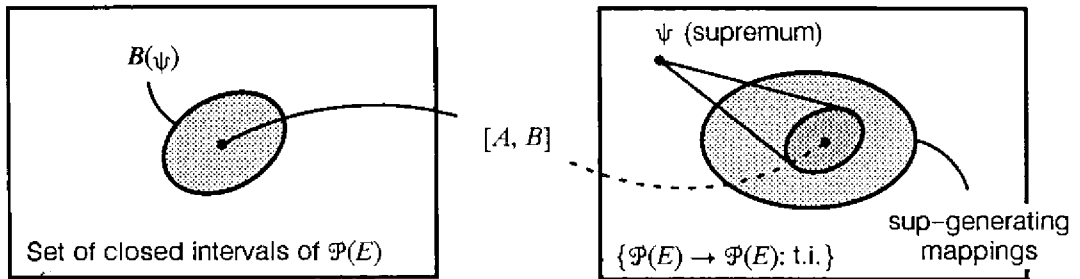
$$[A_1, B_1] \subset [A_2, B_2] \Rightarrow (\cdot \otimes (A_1, B_1)) < (\cdot \otimes (A_2, B_2)).$$

2. Any linearly ordered set of closed intervals of  $\mathcal{F}$  contained in  $\mathcal{K}(\psi)$  has a supremum contained in  $\mathcal{K}(\psi)$ .

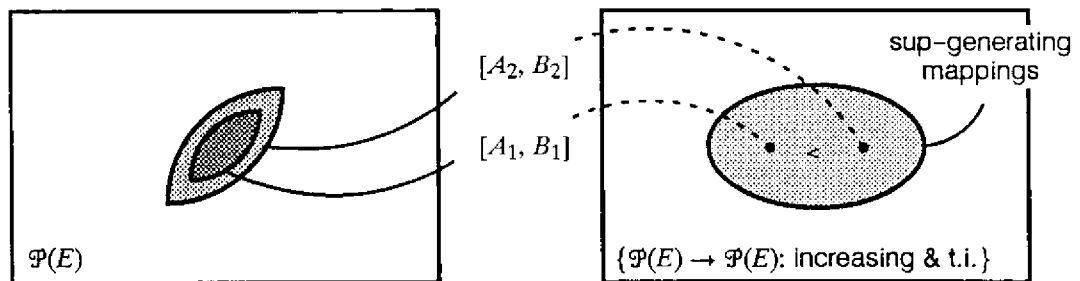




Representation condition for  $\psi$  applied to  $B(\psi)$ .



Minimal representation.



Sup-generating mappings comparison

## 5. DUAL RESULTS

- Let  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$  and

$$\mathcal{A}^* = \left\{ X \in \mathcal{P}(E) : X^c \in \mathcal{A} \right\}.$$

- Let  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(E)$ . The mapping  $\psi^* : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{P}(E)$  defined by

$$\psi^*(X) = (\psi(X^c))^c \quad (X \in \mathcal{A}^*)$$

is called the dual of  $\psi$ .

- Let  $A \in \mathcal{P}(E)$ . The set

$$\check{A} = \left\{ x \in E : -x \in A \right\}$$

is called the symmetrical set of  $A$ .

- Let  $\cdot \otimes (A, B)$  be the mapping defined by

$$\cdot \otimes (A, B) = (\cdot \otimes (\check{A}, \check{B}))^*.$$

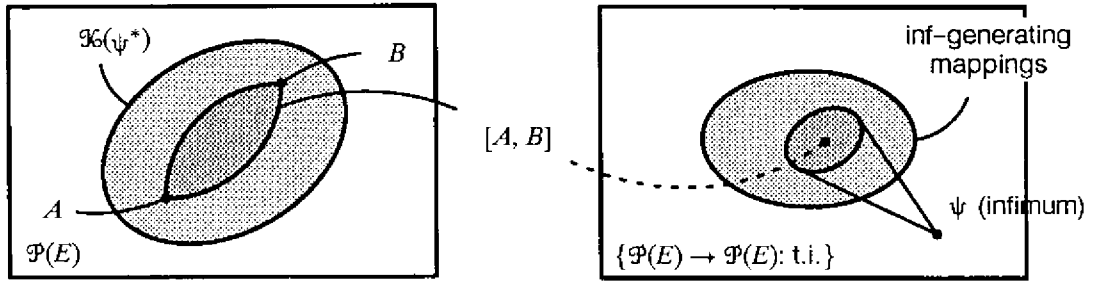
The mappings of the type  $\cdot \otimes (A, B)$  are called inf-generating mappings.

- For any t.i. mapping  $\psi \in \Psi_{\mathcal{A}}$ ,

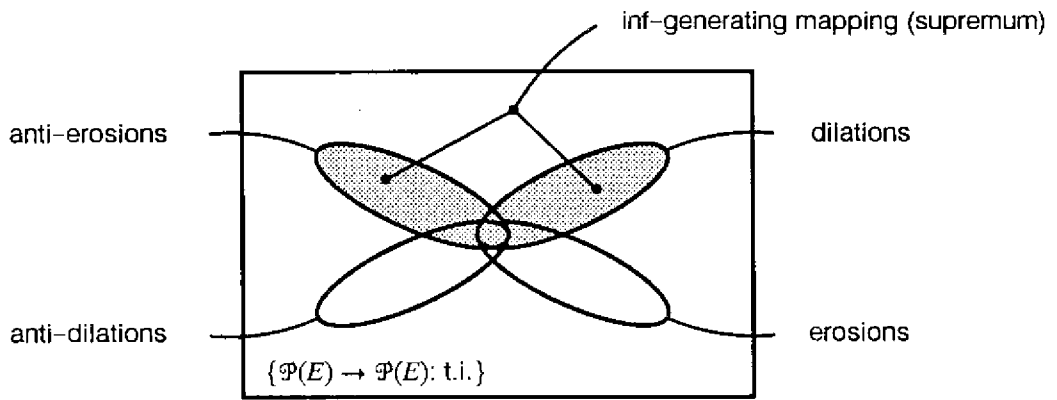
$$\psi = \bigwedge \left\{ \cdot \otimes (\check{A}, \check{B}) : [A, B] \subset \mathcal{K}(\psi^*) \right\}.$$

- This result works by duality principle.
- The inf-generating mappings can be written

$$\cdot \otimes (A, B) = (\cdot \otimes A) \vee (\cdot^c \otimes B^c).$$



Representation Theorem - Dual form.



Inf-generating mapping.

## 6. EXAMPLES

- EDGE EXTRACTION ( $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ )

$$\begin{aligned} (\cdot \otimes D) - (\cdot \otimes D) = \\ (V \{ \cdot \otimes \{x\} : x \in \check{D} \}) \vee (V \{ \cdot^c \otimes \{x\} : x \in \check{D} \}). \end{aligned}$$

- HIT-MISS TRANSFORMATION ( $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ )

$$\begin{aligned} \cdot \otimes (A, B) = \\ (\wedge \{ \cdot \otimes (\{x\}, E) : x \in \check{A} \}) \wedge (\wedge \{ \cdot \otimes (\emptyset, \{x\}^c) : x \in \check{B} \}). \end{aligned}$$

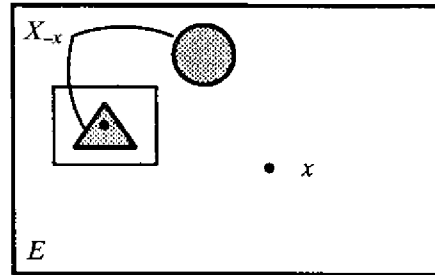
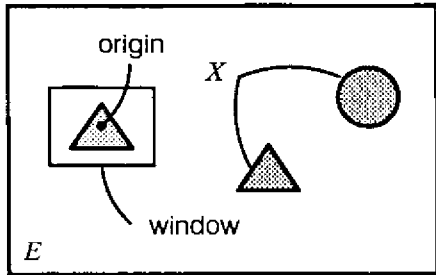
- SHAPE RECOGNITION ( $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ )

- Let  $W \in \mathcal{P}(E)$  and  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(W)$ . The mapping  $\psi$  defined by

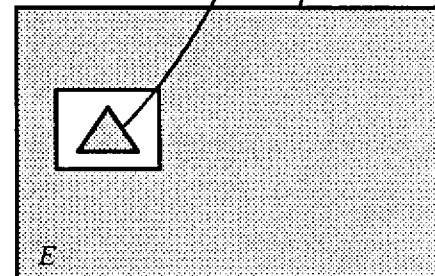
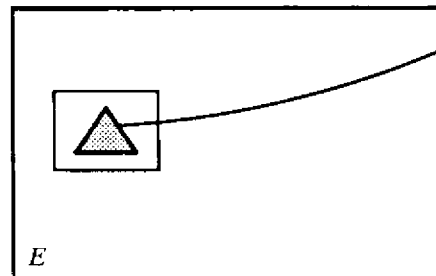
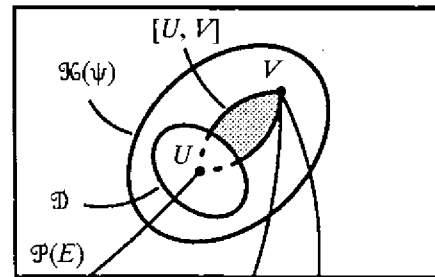
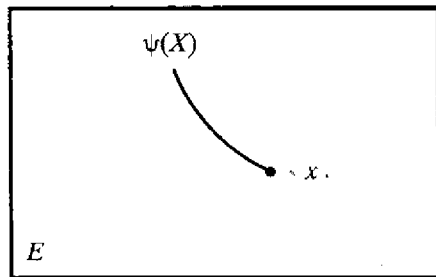
$$\psi(X) = \left\{ x \in E : W \cap X - x \in \mathcal{D} \right\} \quad (X \subset E)$$

is called a window transformation with respect to the window  $W$ .

$$\psi = V \left\{ \cdot \otimes (U, (W - U)^c) : U \in \mathcal{D} \right\}.$$



Window transformation  $\psi$ .



Maximal closed interval  $[U, V]$ .

## 7. CONCLUSION

- Matheron and Maragos results and the representations for decreasing mappings are special cases of the proposed representations for t.i. set mappings.
- Extention to the case of the set mappings *not necessarily* t.i. can be done by using the algebraic definition of erosion and dilation.
- Implementation on highly parallel architectures should lead to high performances to compute  $\psi(X)$ .