Capítulo 6

Aberturas e fechamentos

Neste capítulo vamos introduzir duas novas classes de operadores: a abertura e o fechamento, que ocupam um papel fundamental na área dos filtros morfológicos [Serra88]. Como já fizemos com os operadores elementares, adoteremos uma abordagem axiomática.

As noções de abertura e fechamento foram primeiramente introduzidas no âmbito da topologia. Dado um espaço topológico, a abertura (resp. fechamento) corresponde ao operador que produz o interior (resp. fecho) de um dado subconjunto.

Moore, em 1910, estendeu o conceito de fechamento ao reticulado completo $(\mathcal{P}(E), \subset)$ [Birkho67, p. 111]. As aberturas (resp. fechamentos) sobre reticulados completos são operadores que produzem os ínfimos (resp. supremos) de elementos de subconjuntos sup–fechados (resp. inf–fechados).

Em termos prático, interpretando uma imagem binária como sendo o "espaço disponível", a abertura produz o "espaço útil" em relação a padrões que queremos colocar dentro do "espaço disponível".

Primeiramente, apresentamos as aberturas e os fechamentos ditos algébricos. Em seguida, apresentamos o caso particular das aberturas e dos fechamentos morfológicos. As aberturas e os fechamentos algébricos são caracterizados por meio de subcoleções sup–fechadas de subconjuntos.

Finalmente, as aberturas e os fechamentos invariantes por translação, que receberam muita atenção nos primórdios da Morfologia Matemática [Mather75], serão estudados e o teorema de Matheron sobre a decomposição das aberturas algébricas (resp. fechamentos algébricos) em termos da união (resp. interseção) de aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) é apresentado.

6.1 Aberturas e fechamentos algébricos

As aberturas e os fechamentos são casos particulares de filtros morfológicos. Seja $\mathcal{P}(E)$, ou simplesmente $\mathcal{P}$, a coleção de todos os subconjuntos de E. Os *filtros morfológicos* sobre $\mathcal{P}$ são operadores (sobre $\mathcal{P}$) isotônicos e idempotentes (de tipo 1).

Definição 6.1 (abertura e fechamento) – Um filtro morfológico (sobre $\mathcal{P}$) anti–extensivo é uma *abertura (algébrica)* (sobre $\mathcal{P}$). Um filtro morfológico (sobre $\mathcal{P}$) extensivo é um *fechamento (algébrico)* (sobre $\mathcal{P}$). □

Uma abertura sobre $\mathcal{P}$ é denotada genericamente por γ e um fechamento por ϕ. O subconjunto das aberturas é denotado Γ e o dos fechamentos Φ. Estes dois conjuntos de operadores têm as seguintes propriedades.

Exercício 6.1 {propriedades das aberturas e dos fechamentos) – Prove que para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X) = \gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X)) \quad \text{e} \quad \phi(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X) = \phi(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \phi(X)).$$ □

Prova – De um lado, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X) \subset \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X) \Rightarrow \gamma(\gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X)) \subset \gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X)) \qquad (\gamma \text{ é isotônico})$$

$$\Leftrightarrow \gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X) \subset \gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X)), \qquad (\gamma \text{ é idempotente})$$

isto é, desde que, pela isotonia γ e a Proposição 3.1, $\gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X) \subset \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X)$, temos $\gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X) \subset \gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X))$. De outro lado, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X)) \subset \bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X) \qquad (\gamma \text{ é anti–extensivo})$$

$$\subset \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X, \qquad (\gamma \text{ é anti–extensivo})$$

isto é, pela idempotência e a isotonia de γ, $\gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X)) \subset \gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X)$. Isto prova que, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, temos $\gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X) = \gamma(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} \gamma(X))$.

A prova da igualdade para os fechamentos é similar ou ainda decorre da igualdade para as aberturas por dualidade. □

Proposição 6.1 (propriedades das arberturas e fechamentos) – O subconjunto das aberturas Γ (resp. dos fechamentos Φ) é um subconjunto sup–fechado (resp. inf–fechado) de $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$. □

Prova ([RonHei91, Prop. 2.1]) – Seja $\Psi \subset \Gamma$. Pela Proposição 3.6, $\sup\Psi$ é anti–extensivo.

Vamos provar que $\sup\Psi$ é isotônico. Os operadores em Ψ sendo isotônicos, pelo que foi visto na Seção 3.3, $\sup\Psi$ é também isotônico.

Vamos provar que $\sup\Psi$ é idempotente. De um lado, para todo $\Psi \subset \Gamma$ e $\gamma \in \Psi$,

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma\gamma && (\gamma \text{ é idempotente}) \\ &\leq \gamma(\sup\Psi) && (\gamma \text{ é isotônica}, \gamma \leq \sup\Psi \text{ e Proposição 3.15}) \\ &\leq (\sup\Psi)(\sup\Psi), && (\gamma \leq \sup\Psi \text{ e Proposição 3.15}) \end{aligned}$$

isto é, $(\sup\Psi)(\sup\Psi)$ é l.s. de Ψ e, pela definição de supremo, $\sup\Psi \leq (\sup\Psi)(\sup\Psi)$. Por outro lado, para todo $\Psi \subset \Gamma$,

$$\begin{aligned} \sup\Psi \leq \iota &\Rightarrow (\sup\Psi)(\sup\Psi) \leq \iota(\sup\Psi) && \text{(Proposição 3.15)} \\ &\Leftrightarrow (\sup\Psi)(\sup\Psi) \leq (\sup\Psi), && (\iota \text{ é o elemento neutro da composição}) \end{aligned}$$

isto é, desde que $(\sup\Psi \leq \iota)$ é sempre verdade ($\sup\Psi$ é anti–extensivo), temos $(\sup\Psi)(\sup\Psi) \leq \sup\Psi$. Assim, pela ant–simetria de $\leq$, $(\sup\Psi)(\sup\Psi) = \sup\Psi$ e $\sup\Psi$ é idempotente.

Isto prova que, para todo $\Psi \subset \Gamma$, $\sup\Psi$ é uma abertura. Conseqüentemente, Γ é um conjunto sup–fechado. A prova que Φ é um conjunto inf–fechado é similar ou ainda decorre por dualidade do fato que Γ é um conjunto sup–fechado. □

Pelas Proposições 3.9 e 6.1, o conjunto Γ das aberturas (resp. Φ dos fechamentos) provido da relação de ordem $\leq$ é um *reticulado completo*.

No caso das aberturas, para todo $\Psi \subset \Gamma$, temos

$$\sup_{\mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \Psi = \sup_{\Gamma} \Psi \quad \text{e} \quad \inf_{\Gamma} \Psi \leq \inf_{\mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \Psi.$$

Associado a cada operador, podemos definir uma coleção particular de subconjuntos chamado de domínio de invariância.

Definição 6.2 (domínio de invariância de um operador) – Seja X um subconjunto de E, e seja ψ um operador sobre $\mathcal{P}(E)$. O subconjunto X é um *invariante de* ψ se e somente se $\psi(X) = X$. A coleção de todos os invariantes de ψ é o *domínio de invariância de* ψ e é denotada por $\mathrm{Inv}(\psi)$. □

Exercício 6.2 (domínio de invariância de um operador idempotente) – Mostre que ψ é um operador idempotente (de tipo 1) se e somente se $\mathrm{Inv}(\psi) = \psi(\mathcal{P})$. □

Prova – Seja ψ um operador idempotente. Por um lado, pela definição de indempotência, $\psi(X)$ é um invariante de ψ, o que prova que $\psi(\mathcal{P}) \subset \mathrm{Inv}(\psi)$. Por outro lado, pela definição de imagem de um mapeamento, $\psi(X) \in \psi(\mathcal{P})$, assim, para todo $X \in \mathcal{P}$, se $X \notin \psi(\mathcal{P})$ então $X \neq \psi(X)$ e, conseqüentemente, $X \notin \mathrm{Inv}(\psi)$ Em outros termos, $\mathrm{Inv}(\psi) \subset \psi(\mathcal{P})$. O que prova, pela anti–simetria da inclusão, que $\mathrm{Inv}(\psi) = \psi(\mathcal{P})$.

Inversamente, seja ψ um operador que verifica $\mathrm{Inv}(\psi) = \psi(\mathcal{P})$. Pela definição de imagem de um mapeamento, para todo $X \in \mathcal{P}$, $\psi(X)$ é um invariante de ψ, então, pela definição de invariante, $\psi(\psi(X)) = \psi(X)$. O que prova que ψ é um operador idempotente. □

Proposição 6.2 (propriedade do domínio de invariância dos operadores isotônicos e anti–extensivos) – Seja ψ um operador isotônico e anti–extensivo (resp. extensivo), então seu domínio de invariância $\mathrm{Inv}(\psi)$ é uma subcoleção sup–fechada (resp. inf–fechada). □

Prova – Para todo operador ψ isotônico e anti–extensivo, seja $\mathcal{B} \subset \mathrm{Inv}(\psi)$ e $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Por um lado, para todo $B \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} B &= \psi(B) && (B \in \mathrm{Inv}(\psi)) \\ &\subset \psi(\sup\mathcal{B}), && (B \subset \sup\mathcal{B} \text{ e } \psi \text{ é isotônico}) \end{aligned}$$

isto é, $\psi(\sup\mathcal{B})$ é l.s. de $\mathcal{B}$ ou ainda, pela definição de supremo, $\sup\mathcal{B} \subset \psi(\sup\mathcal{B})$. Por outro lado, pela anti–extensividade de ψ, $\psi(\sup\mathcal{B}) \subset \sup\mathcal{B}$. Pela anti–simetria de $\subset$, isto prova que para todo $\mathcal{B} \subset \mathrm{Inv}(\psi)$ e $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\psi(\sup\mathcal{B}) = \sup\mathcal{B}$. No caso $\mathcal{B} = \emptyset$, pela anti–extensividade de ψ, $\psi(\emptyset) \leq \emptyset$, isto é, $\psi(\emptyset) = \emptyset$. Assim, para todo $\mathcal{B} \subset \mathrm{Inv}(\psi)$, $\sup\mathcal{B} \in \mathrm{Inv}(\psi)$. Em outros termos, $\mathrm{Inv}(\psi)$ é uma subcoleção sup–fechada.

No caso dos operadores ψ, isotônicos e extensivos, a prova que $\mathrm{Inv}(\psi)$ é uma subcoleção inf–fechada é similar ou ainda decorre por dualidade do fato que $\mathrm{Inv}(\psi)$ é uma subcoleção sup–fechada quando ψ é isotônico e anti–extensivo. $\square$

Vamos agora introduzir um mecanismo de construção de aberturas e fechamentos.

Seja $\mathcal{B}$ uma subcoleção qualquer de $\mathcal{P}$, consideramos agora os operadores $\gamma_{\mathcal{B}}$ e $\phi_{\mathcal{B}}$ sobre $\mathcal{P}$ definidos por

$$\gamma_{\mathcal{B}}(X) = \sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\} \quad (X \in \mathcal{P})$$

$$\phi_{\mathcal{B}}(X) = \inf\{B \in \mathcal{B} :\ X \subset B\} \quad (X \in \mathcal{P}).$$

Proposição 6.3 (construção de aberturas e fechamentos) – Para todo $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, $\gamma_{\mathcal{B}}$ é uma abertura sobre $\mathcal{P}$, e $\phi_{\mathcal{B}}$ é um fechamento sobre $\mathcal{P}$. $\square$

Prova – Seja $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$. Vamos provar que $\gamma_{\mathcal{B}}$ é isotônica. Para todo X_1 e X_2 em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} X_1 \subset X_2 &\Rightarrow \{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X_1\} \subset \{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X_2\} && \text{(transitividade)} \\ &\Rightarrow \gamma_{\mathcal{B}}(X_1) \subset \gamma_{\mathcal{B}}(X_2). && \text{(definição de } \gamma_{\mathcal{B}} \text{ e propriedade do supremo)} \end{aligned}$$

Isto prova que $\gamma_{\mathcal{B}}$ é isotônica.

Vamos provar que $\gamma_{\mathcal{B}}$ é anti–extensivo. Para todo X em $\mathcal{P}$, X é l.s. de $\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\}$, isto é, pela definição de supremo, $\sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\} \subset X$ ou ainda, pela definição de $\gamma_{\mathcal{B}}$, $\gamma_{\mathcal{B}}(X) \subset X$. Isto prova que $\gamma_{\mathcal{B}}$ é anti–extensivo.

Vamos provar que $\gamma_{\mathcal{B}}$ é idempotente. Por um lado,

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{B}} \leq \iota &\Rightarrow \gamma_{\mathcal{B}}\gamma_{\mathcal{B}} \leq \iota\gamma_{\mathcal{B}} && \text{(Proposição 3.15)} \\ &\Leftrightarrow \gamma_{\mathcal{B}}\gamma_{\mathcal{B}} \leq \gamma_{\mathcal{B}}, && (\iota \text{ é elemento neutro da composição}) \end{aligned}$$

isto é, desde que $\gamma_{\mathcal{B}}$ é anti–extensivo ($\gamma_{\mathcal{B}} \leq \iota$), temos $\gamma_{\mathcal{B}}\gamma_{\mathcal{B}} \leq \gamma_{\mathcal{B}}$. Por outro lado, para todo X em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{B}}\gamma_{\mathcal{B}}(X) &= \gamma_{\mathcal{B}}(\gamma_{\mathcal{B}}(X)) && \text{(definição do composto)} \\ &= \gamma_{\mathcal{B}}(\sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\}) && \text{(definição de } \gamma_{\mathcal{B}}) \\ &\supset \sup\gamma_{\mathcal{B}}(\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\}) && (\gamma_{\mathcal{B}} \text{ é isotônico e Proposição 3.1)} \\ &= \sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\} && (\gamma_{\mathcal{B}}(B) = B\ (B \in \mathcal{B})) \\ &= \gamma_{\mathcal{B}}(X), \end{aligned}$$

isto é, pela definição de $\leq$, $\gamma_{\mathcal{B}} \leq \gamma_{\mathcal{B}}\gamma_{\mathcal{B}}$. Assim , pela anti–simetria de $\leq$, $\gamma_{\mathcal{B}} = \gamma_{\mathcal{B}}\gamma_{\mathcal{B}}$, o que prova que $\gamma_{\mathcal{B}}$ é idempotente.

Em outros termos, $\gamma_{\mathcal{B}}$ é uma abertura. A prova que $\phi_{\mathcal{B}}$ é um fechamento decorre por dualidade do fato que $\gamma_{\mathcal{B}}$ é uma abertura. $\square$

Os operadores $\gamma_{\mathcal{B}}$ e $\phi_{\mathcal{B}}$ sobre $\mathcal{P}$ chamam–se, respectivamente, *abertura pela coleção* $\mathcal{B}$ (ou *abertura por* $\mathcal{B}$) e *fechamento pela coleção* $\mathcal{B}$ (ou *fechamento por* $\mathcal{B}$). A Figura 6.1 mostra uma abertura por uma coleção de apenas dois subconjuntos. Desde que os dois subconjuntos são contidos em X, o resultado da abertura de X é a união destes. A Figura 6.2 mostra um fechamento por uma outra coleção de dois subconjuntos. Desde que os dois subconjuntos contêm X, o resultado do fechamento de X é a interseção destes.

Agora, estamos interessados em mostrar que o mecanismo de construção de aberturas e fechamentos da Proposição 6.3 é capaz de gerar todas as aberturas e fechamentos. Em outros termos, queremos caracterizar estas duas classes de operadores. Precisamos antes enunciar mais uma proposição relativa às aberturas. Por dualidade, teriamos uma proposição similar relativa aos fechamentos.

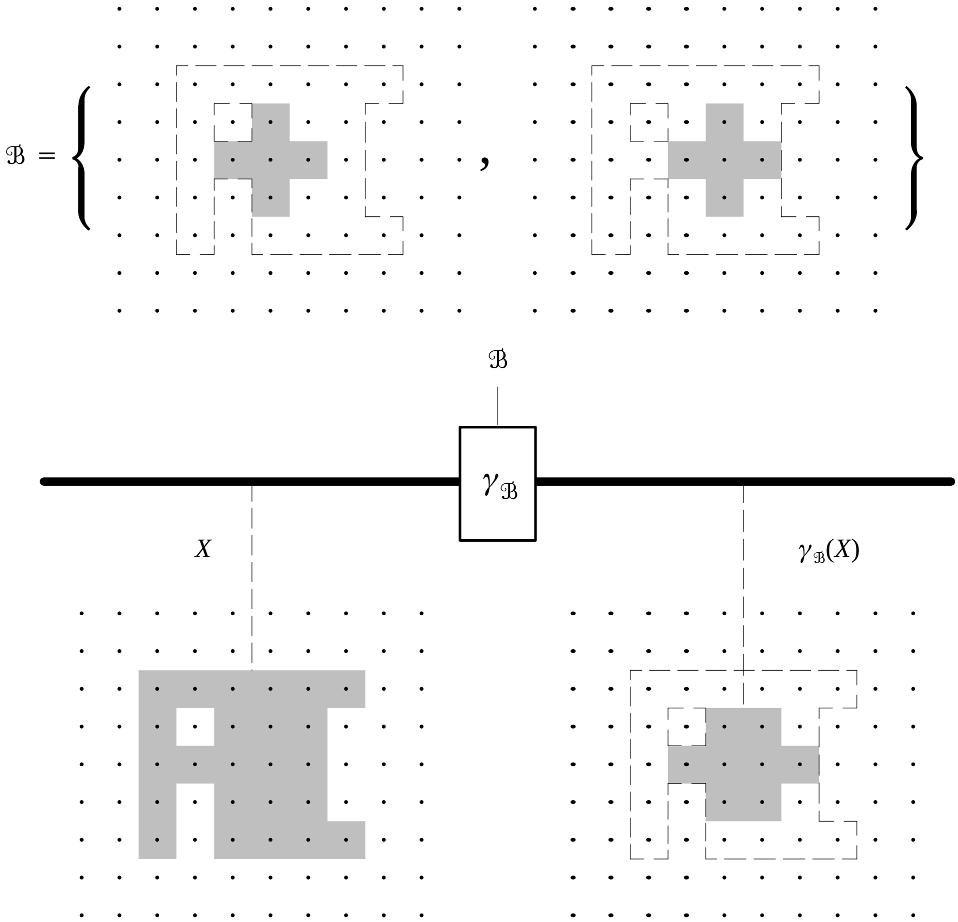

Fig. 6.1 – Abertura algébrica de um subconjunto.

Proposição 6.4 (propriedade das aberturas) – Seja γ uma abertura sobre $\mathcal{P}$ e ψ um operador sobre $\mathcal{P}$, isotônico e anti–extensivo. Então as quatro proposições abaixo são equivalentes:

(1) $\gamma \leq \psi$;

(2) $\gamma\psi = \gamma$;

(3) $\psi\gamma = \gamma$;

(4) $\mathrm{Inv}(\gamma) \subset \mathrm{Inv}(\psi)$. □

Prova ([RonHei91, Prop. 2.3]) – Vamos provar que (1) implica (2).

$$\begin{aligned}
\gamma &= \gamma\gamma && (\gamma \text{ é idempotente})\\
&\leq \gamma\psi && (\gamma \text{ é isotônica, } \gamma \leq \psi \text{ e Proposição 3.15})\\
&\leq \gamma\iota && (\gamma \text{ é isotônica, } \psi \leq \iota \text{ e Proposição 3.15})\\
&= \gamma, && (\iota \text{ é elemento neutro da composição})
\end{aligned}$$

isto é, $\gamma \leq \gamma\psi$ e $\gamma\psi \leq \gamma$, e pela anti–simetria de $\leq$, $\gamma\psi = \gamma$.

Vamos provar que (2) implica (3).

$$\begin{aligned}
\gamma &= \gamma\gamma && (\gamma \text{ é idempotente})\\
&= \gamma\psi\gamma && (\gamma\psi = \gamma)\\
&\leq \iota\psi\gamma && (\gamma \leq \iota \text{ e Proposição 3.15})\\
&= \psi\gamma && (\iota \text{ é elemento neutro da composição})\\
&\leq \iota\gamma && (\psi \leq \iota \text{ e Proposição 3.15})\\
&\leq \gamma, && (\iota \text{ é elemento neutro da composição})
\end{aligned}$$

isto é, $\gamma \leq \psi\gamma$ e $\psi\gamma \leq \gamma$, e pela anti–simetria de $\leq$, $\psi\gamma = \gamma$.

Vamos provar que (3) implica (4). Para todo X em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Inv}(\gamma) &\Leftrightarrow X = \gamma(X) && (\text{definição de Inv})\\
&\Rightarrow \psi(X) = \psi(\gamma(X)) \;\text{ e }\; X = \gamma(X) && (\psi \text{ é mapeamento})\\
&\Leftrightarrow \psi(X) = \psi\gamma(X) \;\text{ e }\; X = \gamma(X) && (\text{definição de composto})\\
&\Leftrightarrow \psi(X) = \gamma(X) \;\text{ e }\; X = \gamma(X) && (\psi\gamma = \gamma)\\
&\Leftrightarrow \psi(X) = X && (\text{equivalência lógica})\\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Inv}(\psi), && (\text{definição de Inv})
\end{aligned}$$

isto é, $\mathrm{Inv}(\gamma) \subset \mathrm{Inv}(\psi)$.

Vamos provar que (4) implica (3). Para todo X em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
\gamma(X) &\in \mathrm{Inv}(\gamma) && (\text{idempotência de } \gamma)\\
&\in \mathrm{Inv}(\psi), && (\mathrm{Inv}(\gamma) \subset \mathrm{Inv}(\psi) \text{ e definição de } \subset)
\end{aligned}$$

isto é, pela definição de Inv, $\psi(\gamma(X)) = \gamma(X)$. Em outros termos, $\psi\gamma = \gamma$.

Vamos provar que (3) implica (1).

$$\begin{aligned}
\gamma \leq \iota &\Rightarrow \psi\gamma \leq \psi\iota && (\text{Proposição 3.15})\\
&\Leftrightarrow \psi\gamma \leq \psi && (\iota \text{ é elemento neutro da composição})\\
&\Leftrightarrow \gamma \leq \psi, && (\psi\gamma = \gamma)
\end{aligned}$$

isto é, desde que γ é anti–extensivo, $\gamma \leq \psi$. □

Para podermos caracterizar as aberturas e os fechamentos, vamos precisar das subcoleções sup–fechadas e inf–fechadas de $\mathcal{P}$ (ver Definição 3.7). Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ o conjunto das subcoleções sup–fechadas e por $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ o das subcoleções inf–fechadas. Lembramos que uma subcoleção inf–fechada chama–se também *família de Moore* [Birkho67, p. 111]. Vamos caracterizar primeiro as aberturas.

Proposição 6.5 (caracterização das aberturas) – O mapeamento de Γ em $\mathcal{S}(\mathcal{P})$,

$$\gamma \mapsto \mathrm{Inv}(\gamma)\ ,$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$\mathfrak{B} \mapsto \gamma_{\mathfrak{B}}\ .$$ □

Prova – Antes de tudo, verificamos que pela Proposição 6.2, para todo γ sobre $\mathcal{P}$, $\mathrm{Inv}(\gamma)$ é uma subcoleção sup–fechado de $\mathcal{P}$, e pela Proposição 6.3, para todo $\mathfrak{B}$ subcoleção de $\mathcal{P}$, $\gamma_{\mathfrak{B}}$ é uma abertura.

Vamos provar que $\gamma \mapsto \mathrm{Inv}(\gamma)$ é uma bijeção. Em primeiro lugar, para todo operador γ_1 e γ_2 sobre $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inv}(\gamma_1) = \mathrm{Inv}(\gamma_2) &\Leftrightarrow \mathrm{Inv}(\gamma_1) \subset \mathrm{Inv}(\gamma_2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Inv}(\gamma_2) \subset \mathrm{Inv}(\gamma_1) && \text{(reflexividade e anti–simetria de } \subset\text{)}\\
&\Leftrightarrow \gamma_1 \leq \gamma_2 \quad \text{e} \quad \gamma_2 \leq \gamma_1 && \text{(Proposição 6.4)}\\
&\Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \,. && \text{(reflexividade e anti–simetria de } \leq\text{)}
\end{aligned}$$

Isto prova que o mapeamento $\gamma \mapsto \mathrm{Inv}(\gamma)$ é injetor.

Em segundo lugar, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$ e $X \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Inv}(\gamma_{\mathcal{B}}) &\Leftrightarrow X = \gamma_{\mathcal{B}}(X) && \text{(definição de Inv)}\\
&\Leftrightarrow X = \sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\} && \text{(definição de } \gamma_{\mathcal{B}}\text{)}\\
&\Leftrightarrow X \in \mathcal{B}, && \text{(“}\mathcal{B}\text{ é sup–fechado” prova } \Rightarrow\text{)}\\
& && \text{(“}X\text{ é o maior elemento de } \{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\}\text{” prova } \Leftarrow\text{)}
\end{aligned}$$

em outros termos, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$, $\mathrm{Inv}(\gamma_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$. Isto prova que o mapeamento $\gamma \mapsto \mathrm{Inv}(\gamma)$ é sobrejetor e consequentemente é uma bijeção. □

A Proposição 6.5 mostra que existe uma correspondência um por um entre Γ e $\mathcal{S}(\mathcal{P})$. As subcoleções sup–fechadas de $\mathcal{P}$ caracterizam sem ambigüidade as aberturas. A Figura 6.3 ilustra este resultado.

Em relação aos fechamentos, temos um resultado dual. O mapeamento de Φ em $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ dado por $\phi \mapsto \mathrm{Inv}(\phi)$ é uma bijeção e seu inverso é $\mathcal{B} \mapsto \phi_{\mathcal{B}}$. Isto é, temos a correspondência um por um entre as famílias de Moore e os fechamentos.

Com a Proposição 6.5 podemos dar uma interpretação interessante da abertura por uma subcoleção sup–fechada de um subconjunto X. Se $\mathcal{B}$ é uma subcoleção sup–fechada, então, pela Proposição 6.5, $\mathrm{Inv}(\gamma_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$. Conseqüentemente, pela idempotência de $\gamma_{\mathcal{B}}$ e pelo Exercício 6.2, para todo X em $\mathcal{P}$, $\gamma_{\mathcal{B}}(X) \in \mathcal{B}$, isto é, pelas definições de $\gamma_{\mathcal{B}}$ e de supremo, e pela anti–extensividade de $\gamma_{\mathcal{B}}$, o subconjunto $\gamma_{\mathcal{B}}(X)$ é o *maior* subconjunto B de $\mathcal{B}$ tal que $B \subset X$.

Os subconjuntos $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ são reticulados completos. Isto decorre da Proposição 3.9 e do fato que estes são, respectivamente, inf–fechado e sup–fechado. Vamos provar, por exemplo, que $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ é um subconjunto inf–fechado. Para todo $\boldsymbol{X} \subset \mathcal{S}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{X} \subset \inf\boldsymbol{X}$, pela definição de ínfimo, $\mathcal{X}$ é l.i. de $\boldsymbol{X}$, isto é, $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B} \in \boldsymbol{X}$. Mas, como todo elemento de $\boldsymbol{X}$ é sup–fechado, $\sup\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B} \in \boldsymbol{X}$. Então, pela definição de interseção, $\sup\mathcal{X} \in \bigcap_{\mathcal{B} \in \boldsymbol{X}} \mathcal{B}$, isto é, pela propriedade da interseção, $\sup\mathcal{X} \in \inf\boldsymbol{X}$. Em outros termos, $\inf\boldsymbol{X}$ é uma coleção sup–fechada, ou ainda, $\inf\boldsymbol{X} \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$. Isto prova que $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ é um subconjunto inf–fechado.

Em relação às aberturas, podemos então enunciar a seguinte proposição.

Proposição 6.6 (isomorfismo de reticulados) – O reticulado Γ das aberturas sobre $\mathcal{P}$ e o reticulado do conjunto $\mathcal{S}(\mathcal{P})$, são isomorfos. Em outros termos, $\gamma \mapsto \mathrm{Inv}(\gamma)$ é um isomorfismo de reticulado, isto é, $\gamma \mapsto \mathrm{Inv}(\gamma)$ é uma bijeção e para todo γ_1 e γ_2 em Γ,

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \mathrm{Inv}(\gamma_1) \subset \mathrm{Inv}(\gamma_2)\,. \qquad \text{(isotonia dupla)}$$

□

Prova – O resultado decorre das Proposições 6.4 e 6.5. □

Em relação aos fechamentos, temos uma proposição dual.

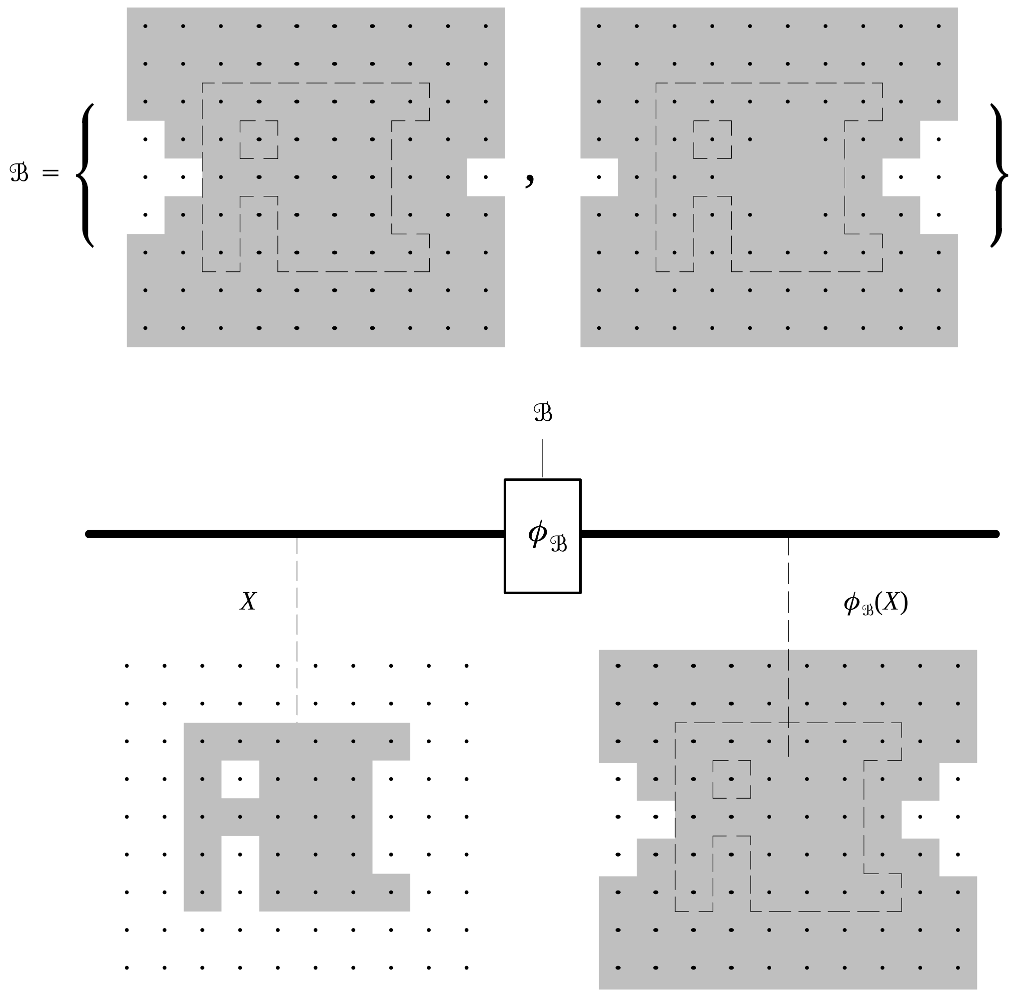

Fig. 6.2 – Fechamento algébrico de um subconjunto.

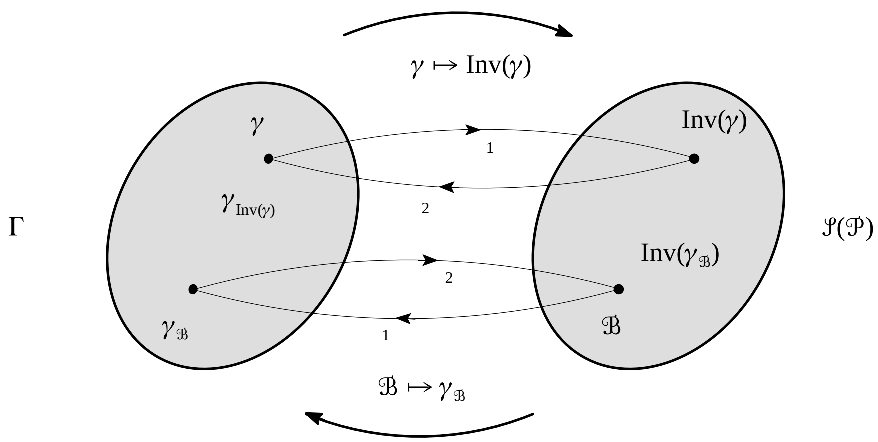

Fig. 6.3 – Bijeção entre as aberturas e as coleções sup–fechadas.

Proposição 6.7 (propriedade da união e interseção de aberturas) – Seja $(\gamma_i)_{i \in I}$ uma família de aberturas sobre $\mathcal{P}$, seja $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ a família dos respectivos domínios de invariância, isto é, $\mathcal{B}_i = \mathrm{Inv}(\gamma_i)$ para todo $i \in I$, e seja $\boldsymbol{B}_I = \{\mathcal{B} \in \mathcal{I}(\mathcal{P}) : \exists i \in I,\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_i\}$. Então

$$\gamma_{\sup_{\mathcal{I}(\mathcal{P})} \boldsymbol{B}_I} = \bigvee_{i \in I} \gamma_i$$

$$\gamma_{\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i} \leq \bigwedge_{i \in I} \gamma_i \,. \qquad \square$$

Prova – A prova é similar a da Proposição 3.12. $\square$

Em particular, a união de duas aberturas (distintas) coincida com a abertura pelo supremo dos domínios de invariância. A interseção de duas aberturas é maior que a abertura pela interseção dos domínios de invariância. Em outros termos,

$$\gamma_{\sup_{\mathcal{I}(\mathcal{P})} \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}} = \gamma_1 \vee \gamma_2 \quad \text{e} \quad \gamma_{\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2} \leq \gamma_1 \wedge \gamma_2.$$

Pela Proposição 3.8, $\sup_{\mathcal{I}(\mathcal{P})} \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ é a menor subcoleção sup–fechada que contem $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Como Ward em 1942 [Szász71], é interessante notar que uma abertura (resp. fechamento) com domínio de invariância $\mathcal{B}$ produz o ínfimo (resp. supremo) em $\mathcal{B}$ de uma subcoleção qualquer de subconjuntos em $\mathcal{B}$ a partir da interseção (resp. união) destes.

Proposição 6.8 (propriedade do domínio de invariância das aberturas e dos fechamentos) – Seja γ uma abertura sobre $\mathcal{P}$ e seja $\mathcal{B}$ seu domínio de invariância. A coleção $\mathcal{B}$ é um reticulado completo relativamente a inclusão e para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$,

$$\inf_{\mathcal{B}} \mathcal{X} = \gamma_{\mathcal{B}}\Big(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X\Big).$$

Seja ϕ um fechamento sobre $\mathcal{P}$ e seja $\mathcal{B}$ seu domínio de invariância. A coleção $\mathcal{B}$ é um reticulado completo relativamente a inclusão e para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$,

$$\sup_{\mathcal{B}} \mathcal{X} = \phi_{\mathcal{B}}\Big(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\Big). \qquad \square$$

Prova – De um lado, pela Proposição 6.2, $\mathcal{B}$ é uma subcoleção sup–fechadade de $(\mathcal{P}, \subset)$, então pela Proposição 3.9, $(\mathcal{B}, \subset)$ é um reticulado completo. De outro lado, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}
\inf_{\mathcal{B}} \mathcal{X} &= \sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \text{ é l.i. de } \mathcal{X}\} && \text{(Proposição 3.8)} \\
&= \sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset \inf_{\mathcal{P}} \mathcal{X}\} && \text{(definição de ínfimo)} \\
&= \sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X\} && \text{(propriedade da interseção)} \\
&= \gamma_{\mathcal{B}}\Big(\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X\Big). && \text{(definição de abertura por } \mathcal{B})
\end{aligned}$$

A prova do resultado sobre os fechementos é similar a prova decorre do resultado sobre as aberturas por dualidade. □

As vezes, é interessante fazer uma distinção entre os invariantes de uma abertura e os de um fechamento.

Definição 6.3 (abertos e fechados) – Sejam γ e ϕ, respectivamente, uma abertura e um fechamento sobre $\mathcal{P}$. Os invariantes de γ chamam–se de *abertos relativos a* γ. Os invariantes de ϕ chamam–se de *fechados relativos a* ϕ. □

Pela Proposição 6.2, a união de abertos é um aberto e a interseção de fechados é um fechado.

Antes de terminar esta seção, vamos introduzir a noção de subcoleção sup–fechada gerada e apresentar três proposições interessantes ligadas as aberturas.

Seja $\mathcal{B}$ uma subcoleção qualquer de $\mathcal{P}$. A *subcoleção sup–fechada gerada por* $\mathcal{B}$ é a subcoleção de $\mathcal{P}$, denotada $\overline{\mathcal{B}}$ e dada por

$$\overline{\mathcal{B}} = \{X \in \mathcal{P} : \exists \mathcal{X} \subset \mathcal{B},\ \sup \mathcal{X} = X\}.$$

Proposição 6.9 (domínio de invariância de uma abertura por uma subcoleção) – Seja $\mathcal{B}$ uma subcoleção de $\mathcal{P}$ então

$$\mathrm{Inv}(\gamma_{\mathcal{B}}) = \overline{\mathcal{B}}.$$ □

Prova – Para toda subcoleção $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Inv}(\gamma_{\mathcal{B}}) &\Leftrightarrow \gamma_{\mathcal{B}}(X) = X && \text{(definição de Inv)}\\
&\Leftrightarrow \sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\} = X && \text{(definição de } \gamma_{\mathcal{B}})\\
&\Leftrightarrow \exists \mathcal{X} \subset \mathcal{B},\ \sup \mathcal{X} = X &&\\
& && (\mathcal{X} = \{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\} \text{ prova } \Rightarrow)\\
& && (X = \sup \mathcal{X} \subset \sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\} \subset X \text{ prova } \Leftarrow)\\
&\Leftrightarrow X \in \overline{\mathcal{B}}, && \text{(definição de } \overline{\mathcal{B}})
\end{aligned}$$

isto é, $\mathrm{Inv}(\gamma_{\mathcal{B}}) = \overline{\mathcal{B}}$. □

Esta primeira proposição associada as Proposições 6.2 e 6.3 mostra que $\overline{\mathcal{B}}$ é realmente uma subcoleção sup–fechado, isto é, $\overline{\mathcal{B}} \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$.

Se $\mathcal{B}$ é uma subcoleção sup–fechada então, pela Proposição 6.5, $\mathrm{Inv}(\gamma_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$, mas pela Proposição 6.9, $\mathrm{Inv}(\gamma_{\mathcal{B}}) = \overline{\mathcal{B}}$, isto prova que, neste caso, $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$.

Observamos que o mapeamento de $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ em $\mathcal{P}(\mathcal{P})$, $\mathcal{B} \mapsto \overline{\mathcal{B}}$ é a composição $\gamma \mapsto \mathrm{Inv}(\gamma)$ por $\mathcal{B} \mapsto \gamma_{\mathcal{B}}$.

Proposição 6.10 (fechamento das subcoleções de subconjuntos) – O mapeamento de $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ em $\mathcal{P}(\mathcal{P})$, $\mathcal{B} \mapsto \overline{\mathcal{B}}$ é um fechamento. □

Prova – Vamos provar que $\mathcal{B} \mapsto \overline{\mathcal{B}}$ é isotônico. Para todo $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ tal que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, e todo X em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X \in \overline{\mathcal{B}_1} &\Leftrightarrow \exists \mathcal{X} \subset \mathcal{B}_1,\ \sup \mathcal{X} = X && \text{(definição de } \overline{\mathcal{B}})\\
&\Rightarrow \exists \mathcal{X} \subset \mathcal{B}_2,\ \sup \mathcal{X} = X && (\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2)\\
&\Leftrightarrow X \in \overline{\mathcal{B}_2}, && \text{(definição de } \overline{\mathcal{B}})
\end{aligned}$$

isto é, $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \;\Rightarrow\; \overline{\mathfrak{B}_1} \subset \overline{\mathfrak{B}_2}$.

Vamos provar que $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$ é extensivo. Para todo X em $\mathfrak{P}$,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{B} \;&\Rightarrow\; \exists \mathfrak{X} \subset \mathfrak{B},\; \sup \mathfrak{X} = X && (\mathfrak{X} = \{X\}) \\ &\Leftrightarrow\; X \in \overline{\mathfrak{B}}\,, && (\text{definição de } \overline{\mathfrak{B}}) \end{aligned}$$

isto é, $\mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{B}}$.

Vamos provar que $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$ é idempotente. Por um lado, pela extensividade $\mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{B}}$ e pela isotonia $\overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$. Por outro lado, para todo X em $\mathfrak{P}$,

$$\begin{aligned} X \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}} \;&\Leftrightarrow\; \exists \mathfrak{X} \subset \overline{\mathfrak{B}},\; \sup \mathfrak{X} = X && (\text{definição de } \overline{\mathfrak{B}}) \\ &\Rightarrow\; X \in \overline{\mathfrak{B}}\,, && (\overline{\mathfrak{B}} \text{ é sup–fechado}) \end{aligned}$$

isto é, $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \subset \overline{\mathfrak{B}}$. Assim, $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \overline{\mathfrak{B}}$. □

Com esta segunda proposição observamos o seguinte. Seja $\boldsymbol{B}_I = \{\mathfrak{B} \in \mathcal{S}(\mathfrak{P}) : \exists i \in I,\; \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i\}$. Aplicando ao fechamento $\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}}$ a Proposição 6.8, para toda família $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$ a valores em $\mathcal{S}(\mathfrak{P})$, temos

$$\sup_{\mathcal{S}(\mathfrak{P})} \boldsymbol{B}_I = \overline{\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i}.$$

Assim, a igualdade da Proposição 6.7 pode se reescrever

$$\gamma_{\overline{\bigcup_{i\in I} \mathfrak{B}_i}} = \bigvee_{i \in I} \gamma_i$$

Em particular, a união de duas aberturas (distintas) coincida com a abertura pela subcoleção sup–fechada gerada pela união dos domínios de invariância. Em outros termos,

$$\gamma_{\overline{\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2}} = \gamma_1 \vee \gamma_2\,.$$

Proposição 6.11 (aberturas equivalentes) – Seja $\mathfrak{B}$ uma subcoleção de $\mathfrak{P}$ então

$$\gamma_{\overline{\mathfrak{B}}} = \gamma_{\mathfrak{B}}\,. \qquad \square$$

Prova – Para todo $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(\gamma_{\overline{\mathfrak{B}}}) &= \overline{\overline{\mathfrak{B}}} && (\text{Proposição 6.9}) \\ &= \overline{\mathrm{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}})} && (\text{Proposição 6.9}) \\ &= \mathrm{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}), && (\mathrm{Inv}(\gamma_{\mathfrak{B}}) \text{ é sup–fechada}) \end{aligned}$$

isto é, pela Proposição 6.5, para todo $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}$, $\gamma_{\overline{\mathfrak{B}}} = \gamma_{\mathfrak{B}}$. □

Com esta terceira proposição, a igualdade da Proposição 6.7 pode ainda se simplificar

$$\gamma_{\bigcup_{i\in I} \mathfrak{B}_i} = \bigvee_{i \in I} \gamma_i$$

Em particular, a união de duas aberturas (distintas) coincida, simplesmente, com a abertura pela união dos domínios de invariância. Em outros termos,

$$\gamma_{\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2} = \gamma_1 \vee \gamma_2\,.$$

Seja $\mathcal{B}$ uma subcoleção sup–fechada. Uma subcoleção $\mathcal{B}'$ tal que $\overline{\mathcal{B}'} = \mathcal{B}$, chama–se de *base de* $\mathcal{B}$.

Encontrada uma base para $\mathcal{B}$, temos uma maneira de simplificar a construção da abertura por $\mathcal{B}$. De fato, pela Proposição 6.11, a abertura por $\mathcal{B}$ é idêntica a abertura pela base $\mathcal{B}'$, em outros termos, $\gamma_{\mathcal{B}} = \gamma_{\mathcal{B}'}$

6.2 Aberturas e fechamentos morfológicos

Vamos agora deduzir algumas propriedades adicionais relativas aos pares de erosões e dilatações formando as conexões de Galois do Capítulo 5.

Proposição 6.12 (propriedade das conexões de Galois) – Seja (ϵ, δ) uma conexão de Galois entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$, então

$$\epsilon\delta\epsilon = \epsilon \quad \text{e} \quad \delta\epsilon\delta = \delta. \qquad \square$$

Prova – Seja (ϵ, δ) um par de operadores sobre $\mathcal{P}$. Por um lado,

$$\begin{aligned} (\epsilon,\delta) \text{ é conexão de Galois } &\Rightarrow \delta\epsilon \leq \iota && \text{(definição de conexão de Galois)} \\ &\Rightarrow \epsilon\delta\epsilon \leq \epsilon\iota && (\varepsilon \text{ é isotônico e Proposição 3.15}) \\ &\Leftrightarrow \epsilon\delta\epsilon \leq \epsilon. && (\iota \text{ é elemento neutro da composição}) \end{aligned}$$

De outro lado,

$$\begin{aligned} (\epsilon,\delta) \text{ é conexão de Galois } &\Rightarrow \iota \leq \epsilon\delta && \text{(definição de conexão de Galois)} \\ &\Rightarrow \iota\epsilon \leq \epsilon\delta\epsilon && \text{(Proposição 3.15)} \\ &\Leftrightarrow \epsilon \leq \epsilon\delta\epsilon. && (\iota \text{ é elemento neutro da composição}) \end{aligned}$$

Em outros termos, pela anti–simetria de $\leq$, $\epsilon\delta\epsilon = \epsilon$.

A prova que $\delta\epsilon\delta = \delta$, é similar. $\square$

Da Proposição 6.12, deduzimos, que, para toda conexão de Galois (ϵ, δ),

$$\epsilon\delta\epsilon\delta = \epsilon\delta \quad \text{e} \quad \delta\epsilon\delta\epsilon = \delta\epsilon.$$

Proposição 6.13 (propriedade da composição de erosão – dilatação formando uma conexão de Galois) – Seja (ϵ, δ) uma conexão de Galois entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$, então $\delta\epsilon$ e $\epsilon\delta$ são, respectivamente, uma abertura e um fechamento sobre $\mathcal{P}$. $\square$

Prova – Seja (ϵ, δ) uma conexão de Galois entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$. Pela definição de conexão de Galois, os operadores $\delta\epsilon$ e $\epsilon\delta$ são isotônicos e, respectivamente, anti–extensivo e extenvivo. Pela Proposição 6.12, os operadores $\delta\epsilon$ e $\epsilon\delta$ são também idempotentes. Isto prova que $\delta\epsilon$ e $\epsilon\delta$ são, respectivamente, uma abertura e um fechamento. $\square$

Esta proposição justifica a seguinte definição.

Definição 6.4 (abertura e fechamento morfológico) – Um operador γ sobre $\mathcal{P}$ é uma *abertura morfológica* se e somente se existe uma conexão de Galois (ϵ, δ) entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$ tal que $\gamma = \delta\epsilon$. Um operador ϕ sobre $\mathcal{P}$ é um *fechamento morfológico* se e somente se existe uma conexão de Galois (ϵ, δ) entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$ tal que $\phi = \epsilon\delta$. $\square$

Observamos que o mapeamento das conexões de Galois em Γ, $(\epsilon, \delta) \mapsto \delta\epsilon$ não é injetor. O exemplo abaixo mostra que duas conexões de Galois podem gerar a mesma abertura morfológica.

Seja $E = \mathbf{Ret}(n_1, n_2)$, seja $A = \{(x_1, x_2) \in E : \ x_1 = 0\}$ e seja a a seguinte função estrurante de E em $\mathcal{P}(E)$

$$a(y) = \begin{cases} \{y\} & \text{se } y \in A \\ \{y\} + (0,1) & \text{c.c.} \end{cases} \qquad (y \in E).$$

Então $\delta_a \epsilon_a = \iota$ e $\iota\iota = \iota$, isto é, as conexões de Galois (ϵ_a, δ_a) e (ι, ι) gerem a mesma abertura ι.

Dado uma função estruturante a de E em $\mathcal{P}$, a *abertura* (*morfológica*) *por a* é a abertura morfológica sobre $\mathcal{P}$, denotado γ_a tal que

$$\gamma_a = \delta_a \epsilon_a \ ,$$

e o *fechamento* (*morfológico*) *por a* é o fechamento morfológico sobre $\mathcal{P}$, denotado ϕ_a tal que

$$\phi_a = \epsilon_a \delta_a \ .$$

Exercício 6.3 (definição equivalente de abertura por uma função estruturante) – Seja a uma função de E em $\mathcal{P}$. Usando as definições de δ_a e ϵ_a, prove que

$$\gamma_a(X) = \bigcup_{y \in E \text{ e } a(y) \subset X} a(y) \quad (X \in \mathcal{P}).$$ □

Toda abertura morfólogica (resp. fechamento morfólogico) é uma abertura algébrica (resp. fechamento algébrico). O contrário geralmente não vale, mas pelo Teorema 1.4 de [Serra88] sabemos que toda abertura algébrica pode se escrever como o supremo de aberturas morfológicas.

No caso das aberturas e fechamentos morfológicos, podemos determinar facilmente os abertos e os fechados.

Proposição 6.14 (determinação dos abertos e dos fechados) – Seja (ϵ, δ) uma conexão de Galois entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$. Os abertos são as imagens de algum elemento de $\mathcal{P}$ através da dilatação δ. Os fechados são as imagens de algum elemento de $\mathcal{P}$ através da erosão ε. Em outros termos,

$$\mathrm{Inv}(\delta\epsilon) = \delta(\mathcal{P}) \quad \text{e} \quad \mathrm{Inv}(\epsilon\delta) = \epsilon(\mathcal{P}).$$ □

Prova – Vamos provar o caso dos abertos. Para toda conexão de Galois (ϵ, δ) entre $(\mathcal{P}, \supset)$ e $(\mathcal{P}, \subset)$,

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{P}) &= \delta\epsilon\delta(\mathcal{P}) && \text{(Proposição 6.12)} \\ &\subset \delta\epsilon(\mathcal{P}) && \text{(propriedade dos mapeamentos)} \\ &\subset \delta(\mathcal{P}), && \text{(propriedade dos mapeamentos)} \end{aligned}$$

isto é, pela anti–simetria da inclusão, $\delta(\mathcal{P}) = \delta\epsilon(\mathcal{P})$ e, pela idempotência de $\delta\epsilon$ e pelo Exercício 6.2, $\delta(\mathcal{P}) = \mathrm{Inv}(\delta\epsilon)$.

A prova no caso dos fechados é similar. □

A Figura 6.4 ilustra este resultado.

Exercício 6.4 (base do domínio de invariância de uma abertura por um elemento estruturante) – Usando a Proposição 6.14, mostre que a subcoleção $\{B \in \mathcal{P} : \ \exists y \in E, \ a(y) = B\}$ é uma base para $\mathrm{Inv}(\gamma_a)$. □

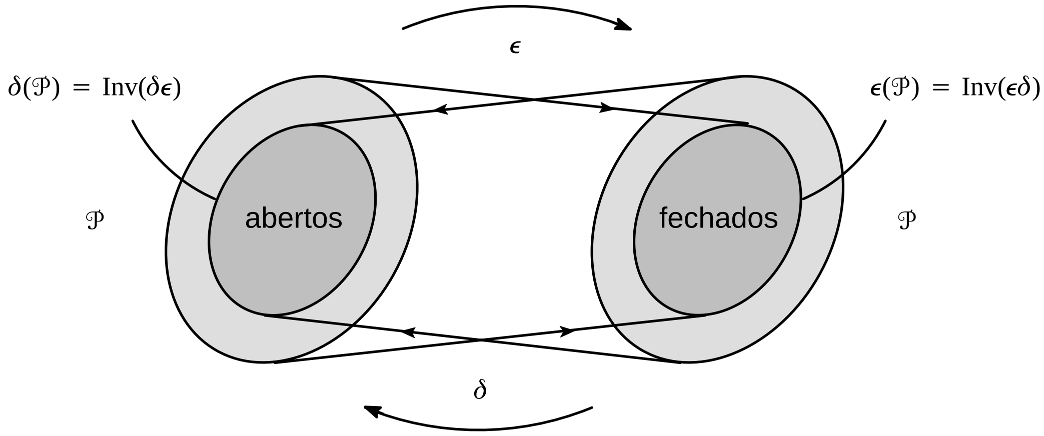

Fig. 6.4 – Deteminação dos abertos e fechados relativos à uma conexão de Galois.

Prova – Para todo $X \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
X \in \delta_a(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{P},\ \delta_a(Y) = X && \text{(definição da imagem de um mapeamento)}\\
&\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{P},\ \bigcup_{y \in Y} a(y) = X && \text{(definição de } \delta_a)\\
&\Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{P},\ \sup\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in Y,\ a(y) = B\} = X && \text{(propriedade da união)}\\
&\Leftrightarrow \exists \mathcal{X} \subset \{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E,\ a(y) = B\},\ \sup\mathcal{X} = X\\
& && (\mathcal{X} = \{B \in \mathcal{P} : \exists y \in Y,\ a(y) = B\} \text{ prova } \Rightarrow)\\
& && (Y = \{y \in E : a(y) \in \mathcal{X}\} \text{ prova } \Leftarrow)\\
&\Leftrightarrow X \in \overline{\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E,\ a(y) = B\}}.\\
& && \text{(definição de subcoleção sup–fechada gerada)}
\end{aligned}
$$

Isto é, pela Proposição 6.14, $\mathrm{Inv}(\gamma_a) = \overline{\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E,\ a(y) = B\}}$.

Em outros termos, pela definição de base, $\{B \in \mathcal{P} : \exists y \in E,\ a(y) = B\}$ é uma base para $\mathrm{Inv}(\gamma_a)$. □

Pelo resultado do Exercício 6.4 e da Proposição 6.11, temos $\gamma_a = \gamma_{\{B\in\mathcal{P}:\ \exists y\in E,\ a(y)=B\}}$. Assim, temos um outro caminho para deduzir que a expressão de $\gamma_a(X)$ do Exercício 6.3.

É muito importante notar que numa conexão de Galois (ϵ, δ), ϵ e δ *não* são geralemente mapeamentos recíprocos, isto é, um *não* é o inverso do outro ou ainda, nós *não* temos $\delta\epsilon = \iota$ ou $\epsilon\delta = \iota$, temos apenas $\delta\epsilon \leq \iota$ e $\iota \leq \epsilon\delta$. Por exemplo, o subconjunto X, uma vez erodido por uma erosão ϵ *não* pode ser *reconstruído* por méio da dilatação δ (geralmente *não* temos $\delta(\epsilon(X)) = X$).

No entanto, esta reconstrução, após uma erosão, é possível para os abertos (relativos a $\delta\epsilon$). Temos os seguintes resultados. Para todo $Y \in \epsilon(\mathcal{P})$ (isto é, para todo fechado relativo a $\epsilon\delta$), seja $\mathcal{X}_Y$ a coleção de todos os subconjuntos X em $\mathcal{P}$ tal que $\epsilon(X) = Y$. A dilatação de Y por δ, $\delta(Y)$ é um elemento de $\mathcal{X}_Y$ (Y fechado, $\epsilon(\delta(Y)) = Y$), $\delta(Y)$ *pode* ser reconstuído por méio da dilatação δ após uma erosão por ϵ (pela Proposição 6.12, $\delta\epsilon(\delta(Y)) = \delta(Y)$), $\delta(Y)$ é o *único* dentre de $\mathcal{X}_Y$ que pode ser reconstruído (δ é um mapeamento) e $\delta(Y)$ é o menor de todos os membros de $\mathcal{X}_Y$ ($\delta(Y) = \delta\epsilon(X) \leq X$, para todos os $X \in \mathcal{X}_Y$).

A Figura 6.5 ilustra estes resultados.Nesta figura, a erosão ϵ e a dilatação δ são invariantes por trans-

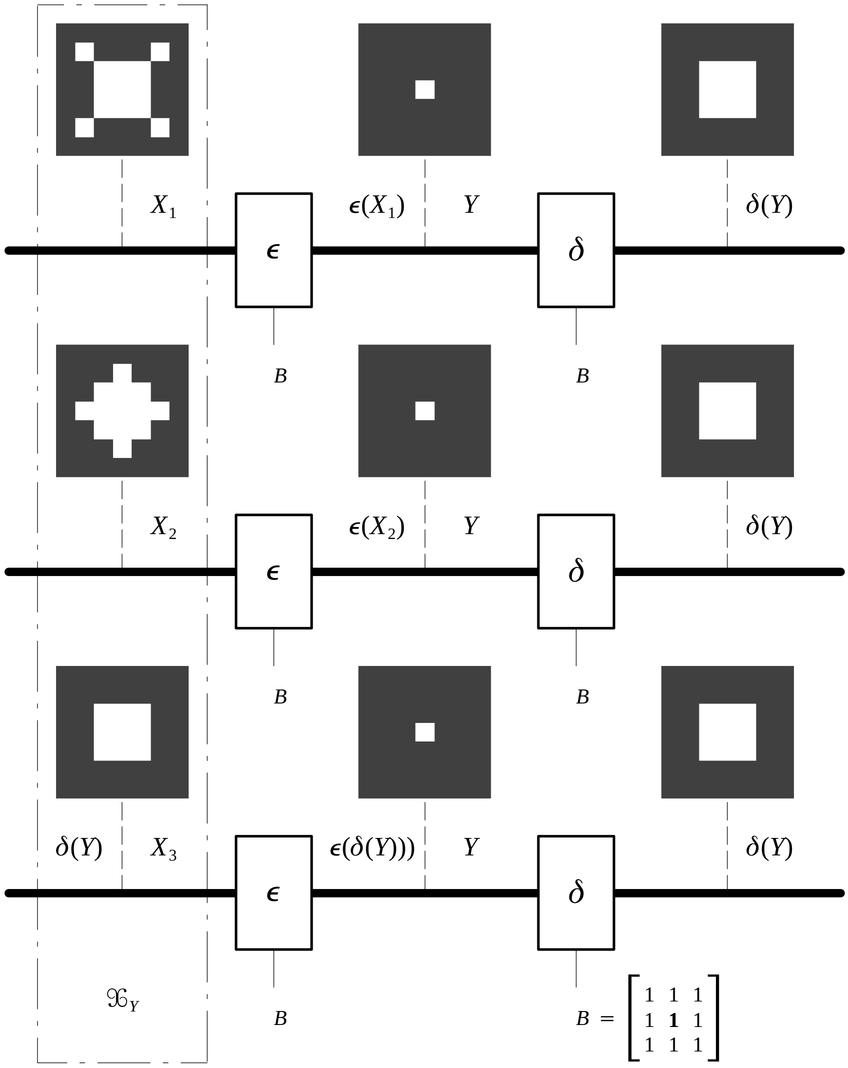

Fig. 6.5 – Problema da reconstrução após uma erosão.

lação e têm como elemento estruturante o quadrado 3×3. Os subconjuntos X_1, X_2 e X_3 ($X_3 = \delta(Y)$) são exemplos de elementos de $\mathcal{X}_Y$, isto é, a suas erosões produzem Y. Observa–se que somente X_3 pode ser reconstruído exatamente pela dilatação δ após a erosão ϵ. Oberserva–se também que X_3 é menor que X_1 e X_2.

Como no caso das dilatações e erosões, podemos estabelecer relações entre as aberturas e os fechamentos por funções estruturantes. Vamos estabelecer uma relação baseada na dualidade por complementação da Seção 5.2. Precisamos do resultado do seguinte exercíco.

Exercício 6.5 (dual do composto) – Sejam α e β dois operadores sobre $\mathcal{P}$. Prove que

$$(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*. \qquad \square$$

Proposição 6.15 (transposição versus dualidade por complementação) – As proposições abaixo são equivalentes. Para todo a e b em $\mathcal{P}^E$,

a e b mutuamente transposto $\Leftrightarrow$ γ_a e ϕ_b mutuamente duais por complementação;

$\gamma_a{}^* = \phi_{a^t}$;

$\phi_b{}^* = \gamma_{b^t}$. □

Prova – Vamos provar a segunda proposição. Para todo a em $\mathcal{P}^E$,

$$\begin{aligned}
\gamma_a{}^* &= (\delta_a \epsilon_a)^* && \text{(definição de } \gamma_a\text{)} \\
&= \delta_a{}^* \epsilon_a{}^* && \text{(Exercício 6.5)} \\
&= \epsilon_{a^t} \delta_{a^t} && \text{(Proposição 5.12)} \\
&= \phi_{a^t}. && \text{(definição de } \phi_a\text{)}
\end{aligned}$$

Em outros termos, a composição de $\gamma \mapsto \gamma^*$ por $a \mapsto \delta_a \epsilon_a$, isto é, $a \mapsto \delta_a \epsilon_a{}^*$ é idêntica a composição de $b \mapsto \epsilon_b \delta_b$ por $a \mapsto a^t$, isto é, $a \mapsto \epsilon_{a^t} \delta_{a^t}$.

As outras proposições decorrem deste resultado usando o fato que os mapeamentos $\gamma \mapsto \gamma^*$, $a \mapsto \delta_a \epsilon_a$, $b \mapsto \epsilon_b \delta_b$ e $a \mapsto a^t$ são bijeções. □

A Figura 6.6 ilustra o resultado da Proposição 6.15 e mostra como ele é obtido.

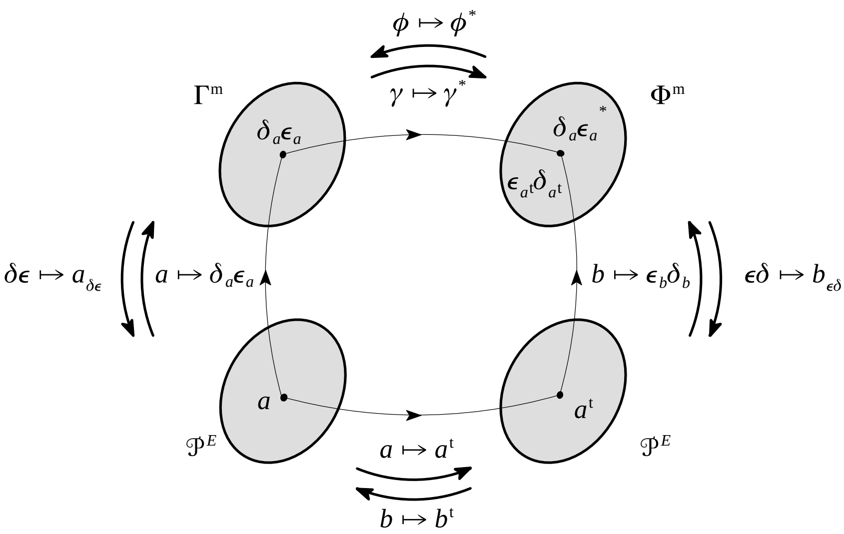

Fig. 6.6 – Transposição versus dualidade por complementação.

6.3 Aberturas e fechamentos invariantes por translação

Para estudar as aberturas e os fechamentos morfológicos invariantes por translação precisamos definir a noção de subcoleção invariante por translação.

Definição 6.5 (subcoleção invariante por translação) – Seja E um grupo Abeliano. Uma subcoleção $\mathcal{X}$ de $\mathcal{P}(E)$ é *invariante por translação (i.t.)* se e somente se, para todo $u \in E$,

$$\tau_u(\mathcal{X}) = \mathcal{X}. \qquad \square$$

Exercício 6.6 (condição suficiente para uma subcoleção ser i.t.) – Seja E um grupo Abeliano. Seja $\mathcal{X}$ uma subcoleção de $\mathcal{P}(E)$ então

$$(\tau_u(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X} \quad (u \in E)) \Rightarrow \mathcal{X} \text{ é i.t.}. \qquad \square$$

Prova – De um lado, por hipótese, para todo $u \in E$, $\tau_u(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. De outro lado, para todo $u \in E$,

$$\begin{aligned}
\tau_{-u}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X} &\Rightarrow \tau_u(\tau_{-u}(\mathcal{X})) \subset \tau_u(\mathcal{X}) && (\tau_u \text{ é isotônico})\\
&\Leftrightarrow \tau_u\tau_{-u}(\mathcal{X}) \subset \tau_u(\mathcal{X}) && (\text{definição de composto})\\
&\Leftrightarrow \iota(\mathcal{X}) \subset \tau_u(\mathcal{X}) && (\text{lei do elemento neutro})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{X} \subset \tau_u(\mathcal{X}). && (\text{definição de } \iota)
\end{aligned}$$

Assim, pela anti–simetria de $\subset$, $\tau_u(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ e $\mathcal{X}$ é i.t.. $\square$

Os operadores invariantes por translação têm a seguinte propriedade.

Proposição 6.16 (invariância por translação do domínio de invariância) – Seja E um grupo Abeliano. Seja ψ um operador invariante por translação sobre $\mathcal{P}(E)$ então seu domínio de invariância $\mathrm{Inv}(\psi)$ é invariante por translação. $\square$

Prova – Para todo $u \in E$ e todo $B \in \mathrm{Inv}(\psi)$,

$$\begin{aligned}
\psi(\tau_u(B)) &= \psi\tau_u(B) && (\text{definição de composto})\\
&= \tau_u\psi(B) && (\psi \text{ é i.t})\\
&= \tau_u(\psi(B)) && (\text{definição de composto})\\
&= \tau_u(B), && (B \in \mathrm{Inv}(\psi))
\end{aligned}$$

isto é, $\tau_u(B) \in \mathrm{Inv}(\psi)$. Em outros termos, para todo $u \in E$, $\tau_u(\mathrm{Inv}(\psi)) \subset \mathrm{Inv}(\psi)$. Pelo resultado do Exercício 6.6, isto prova que $\mathrm{Inv}(\psi)$ é i.t.. $\square$

As aberturas e os fechamentos por uma subcoleção invariante por translação têm a seguinte propriedade.

Proposição 6.17 (invariância por translação das aberturas e dos fechamentos por uma subcoleção invariante por translação) – Seja E um grupo Abeliano. Seja $\mathcal{B}$ uma subcoleção invariante por translação de $\mathcal{P}(E)$ então $\gamma_{\mathcal{B}}$ e $\phi_{\mathcal{B}}$ são invariantes por translação. $\square$

Prova – Para todo $u \in E$ e todo $X \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
\tau_u\gamma_{\mathcal{B}}(X) &= \tau_u(\gamma_{\mathcal{B}}(X)) && (\text{definição de composto})\\
&= \tau_u(\sup\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\}) && (\text{definição de } \gamma_{\mathcal{B}})\\
&= \sup\tau_u(\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset X\}) && (\tau_u \text{ é uma dilatação})\\
&= \sup\{Y \in \mathcal{P} :\ \exists B \in \mathcal{B},\ \tau_u(B) = Y \text{ e } B \subset X\} && (\text{definição de imagem})\\
&= \sup\{Y \in \mathcal{P} :\ \exists B \in \mathcal{B},\ \tau_u(B) = Y \text{ e } \tau_u(B) \subset \tau_u(X)\}\\
& && (\tau_u \text{ é um automorfismo})\\
&= \sup\{Y \in \tau_u(\mathcal{B}) :\ Y \subset \tau_u(X)\} && (\text{definição de imagem})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sup\{Y \in \mathcal{B} : \ Y \subset \tau_u(X)\} && (\mathcal{B} \text{ é i.t.}) \\ &= \gamma_{\mathcal{B}}(\tau_u(X)) && (\text{definição de } \gamma_{\mathcal{B}}) \\ &= \gamma_{\mathcal{B}}\tau_u(X), && (\text{definição de composto}) \end{aligned}$$

isto é, para todo $u \in E$, $\tau_u\gamma_{\mathcal{B}} = \gamma_{\mathcal{B}}\tau_u$. Em outros termos, $\gamma_{\mathcal{B}}$ é i.t..

A prova que $\phi_{\mathcal{B}}$ é similar. □

Junto com a caracterização já feita das arberturas, as proposições acima permitem caracterizar as aberturas invartiantes por translação.

Proposição 6.18 (caracterização das aberturas invariantes por translação) – Seja E um grupo Abeliano. Seja Γ' o conjunto das aberturas invariantes por translação sobre $\mathcal{P}(E)$. O mapeamento de Γ' no subconjunto de $\mathcal{I}(\mathcal{P}(E))$ das subcoleções invariantes por translação,

$$\gamma \mapsto \mathrm{Inv}(\gamma)$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$\mathcal{B} \mapsto \gamma_{\mathcal{B}} \,.$$ □

Prova – Pela Proposição 6.5, sabemos que $\gamma \mapsto \gamma_{\mathcal{B}}$ é uma bijeção de Γ em $\mathcal{I}(\mathcal{P})$. Basta então observar que, pela Proposição 6.16, para todo $\gamma \in \Gamma'$, $\mathrm{Inv}(\gamma)$ é i.t., e que, pela Proposição 6.17, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{I}(\mathcal{P})$ e i.t., $\gamma_{\mathcal{B}}$ é i.t.. □

Em relação aos fechamentos, temos um resultado dual. O mapeamento de Φ', o conjunto dos fechamentos invariantes por translação sobre $\mathcal{P}(E)$, no subconjunto de $\mathcal{I}(\mathcal{P}(E))$ das subcoleções invariantes por translação, dado por $\phi \mapsto \mathrm{Inv}(\phi)$ é uma bijeção e seu inverso é $\mathcal{B} \mapsto \phi_{\mathcal{B}}$.

Vamos agora considerar o caso de aberturas e fechamentos morfológicos invariantes por translação.

Por definição, uma conexão de Galois (ϵ, δ) é *invariante por translação (i.t.)* se e somente se ε e δ são invariantes por translação. Neste caso, $\delta\epsilon$ e $\epsilon\delta$ são, respectivamente, uma abertura e um fechamento, invariantes por translação como compostos de operadores invariantes por translação.

Definição 6.6 (abertura e fechamento morfológico i.t.) – Seja E um grupo Abeliano. Seja (ϵ, δ) uma conexão de Galois entre $(\mathcal{P}(E), \supset)$ e $(\mathcal{P}(E), \subset)$, invariante por translação. O operador $\delta\epsilon$ chama–se de *abertura morfológica i.t.*. O operador $\epsilon\delta$ chama–se de *fechamento morfológico i.t.*. □

Observamos que as aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) i.t. da Definição 6.6 são também aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) conforme a Definição 6.4, mas nada prova que as aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) da Definição 6.4, *invariantes por translação*, sejam também aberturas morfológicas (resp. fechamentos morfológicos) i.t. conforme a Definição 6.6.

Toda abertura morfólogica (resp. fechamento morfólogico) i.t. é uma abertura algébrica (resp. fechamento algébrico) invariante por translação. O contrário geralmente não vale, mas pela Proposição 7.1.3 de [Mather75] sabemos que toda abertura algébrica invariante por translação pode se escrever como a união de aberturas morfológicas i.t.. Afim de apresentar e provar, até o fim desta seção, o resultado do Matheron, vamos introduzir mais um fechamento sobre as subcoleções de $\mathcal{P}(E)$, assim como a definição de aberturas e fechamentos por um elemento estruturante.

Seja $\mathcal{B}$ uma subcoleção qualquer de $\mathcal{P}$. A *subcoleção invariante por translação gerada por* $\mathcal{B}$ é a subcoleção de $\mathcal{P}$, denotada $<\mathcal{B}>$ e dada por

$$<\mathcal{B}> = \{X \in \mathcal{P} : \ \exists u \in E \text{ e } \exists B \in \mathcal{B}, \ B + u = X\}.$$

Vamos mostrar que $<\mathcal{B}>$ é realmente uma subcoleção invariante por translação. Para todo $u \in E$ e todo $Y \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
Y \in \tau_u(<\mathcal{B}>) &\Leftrightarrow \exists X \in <\mathcal{B}>,\ \tau_u(X) = Y && \text{(definição de imagem)}\\
&\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{P},\ \exists v \in E \text{ e } \exists B \in \mathcal{B},\ \tau_v(B) = X \text{ e } \tau_u(X) = Y\\
& && \text{(definição de } <\mathcal{B}>\text{)}\\
&\Leftrightarrow \exists v \in E \text{ e } \exists B \in \mathcal{B},\ \tau_u(\tau_v(B)) = Y && \text{(implicação lógica)}\\
&\Rightarrow \exists w \in E \text{ e } \exists B \in \mathcal{B},\ \tau_w(B) = Y\\
& && (w = u + v \text{ e propriedade da translação})\\
&\Leftrightarrow Y \in <\mathcal{B}>, && \text{(definição de } <\mathcal{B}>\text{)}
\end{aligned}$$

isto é, para todo $u \in E$, $\tau_u(<\mathcal{B}>) \subset <\mathcal{B}>$. Em outros termos, pelo Exercício 6.6, $<\mathcal{B}>$ é uma subcoleção invariante por translação.

Vamos provar que se $\mathcal{B}$ é uma subcoleção invariante por translação, então $<\mathcal{B}> = \mathcal{B}$. Para todo todo $X \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
X \in <\mathcal{B}> &\Leftrightarrow \exists u \in E \text{ e } \exists B \in \mathcal{B},\ B + u = X && \text{(definição de } <\mathcal{B}>\text{)}\\
&\Leftrightarrow X \in \mathcal{B}, && (\mathcal{B} \text{ é i.t.})
\end{aligned}$$

isto é, $<\mathcal{B}> = \mathcal{B}$.

A noção de subcoleção invariante por translação gerada, conduz a definição do seguinte fechamento sobre $\mathcal{P}(\mathcal{P})$.

Exercício 6.7 (fechamento das subcoleções de subconjuntos) – Seguindo o roteiro da prova da Proposição 6.10, prove que o mapeamento de $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ em $\mathcal{P}(\mathcal{P})$, $\mathcal{B} \mapsto <\mathcal{B}>$ é um fechamento. □

Seja E um grupo Abeliano. Dado um subconjunto A de E, a *abertura por A* é a abertura morfológica i.t. sobre $\mathcal{P}$, denotado γ_A e dado por

$$\gamma_A = \delta_A \epsilon_A\ ,$$

e o *fechamento por A* é o fechamento morfológico i.t. sobre $\mathcal{P}$, denotado ϕ_A e dado por

$$\phi_A = \epsilon_A \delta_A\ .$$

O subconjunto A, chama–se *elemento estruturante*.

A Figura 6.7 mostra uma abertura por um elemento estrurante A e a obtenção da abertura por A de um determinado subconjunto X.

Pela definição de $<\mathcal{B}>$, observamos que $<\{A\}> = \{B \in \mathcal{P} :\ \exists y \in E,\ A + y = B\}$.

Proposição 6.19 (domínio de invariância de uma abertura por um elemento estruturante) – Seja E um grupo Abeliano. Seja γ_A a abertura pelo elemento estruturante A de $\mathcal{P}(E)$, então

$$\mathrm{Inv}(\gamma_A) = \overline{<\{A\}>}. \qquad □$$

Prova – Seja γ_A a abertura por A,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inv}(\gamma_A) &= \overline{\{B \in \mathcal{P} :\ \exists y \in E,\ A + y = B\}} && \text{(Exercício 6.4)}\\
&= \overline{<\{A\}>}. && \text{(definição de } <\mathcal{B}>\text{)}
\end{aligned}$$

□

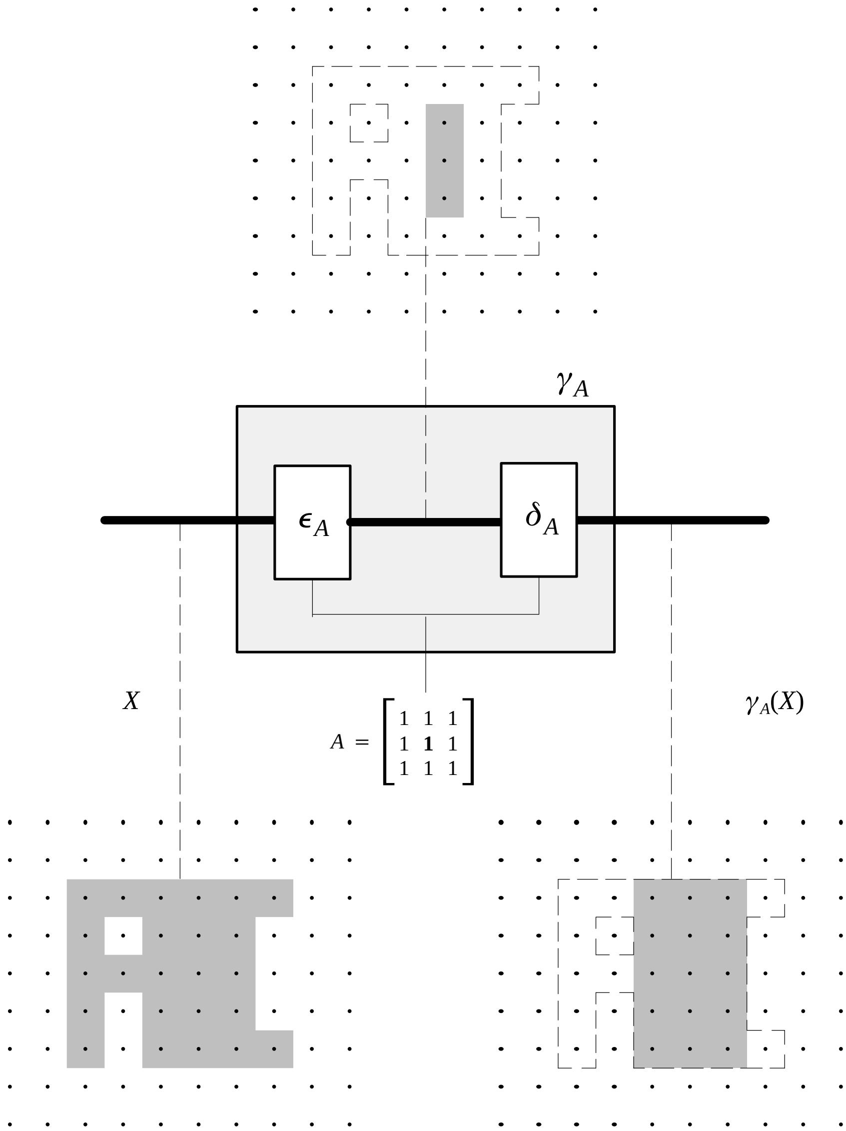

Fig. 6.7 – Abertura morfológica i.t. de um subconjunto.

Uma base para Inv(γ_A) é a subcoleção $<\{A\}>$. Assim, pela Proposição 6.11, temos $\gamma_A = \gamma_{<\{A\}>}$ e conseqüentemente

$$\gamma_A(X) = \bigcup_{y \in E \text{ e } A+y \subset X} A + y \quad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

A Figura 6.8 mostra um modo de construir a abertura por A do subconjunto X da Figura 6.7, usando a expressão $\gamma_A(X)$ acima. O aberto é obtido “pintando” com um pincel possuindo a forma do elemento estruturante (aqui um quadrado) e mantendo o pincel dentro do X. A Figura 6.9 mostra a abertura invariante por translação do subconjunto X que “toca as bordas do domínio”.

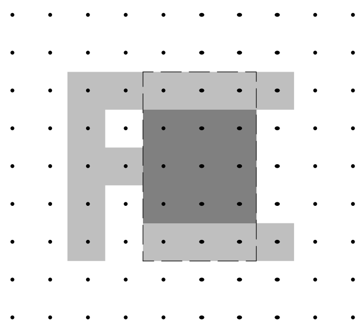

Fig. 6.8 – Modo de construir o aberto.

A Figura 6.10 mostra um fechamento por um elemento estruturante A e a obtenção do fechamento por A de um determinado subconjunto X. A Figura 6.11 mostra um modo de construir o fechamento por A do subconjunto X. O complementar do fechado é obtido "pintando" com um pincel possuindo a forma do elemento estruturante (aqui um quadrado) e mantendo o pincel dentro do X^c.

As Figuras 6.12 e 6.13 mostram os efeitos, respectivamente, de uma abertura e de um fechamento sobre um mesmo subconjunto X por um elemento estruturante 3 por 3. Este subconjunto pode ser interpretado como representando um continente e seu complementar o oceano. Na abertura, observamos (de cima para baixo) a quebra de um ístemo estreito (isto é, de largura inferior ao lado do elemento estruturante), a eliminação de um cabo estreito e de uma ilha pequena e, finalmente, a *abertura* de uma lagoa beirando o litoral. No fechamento, observamos (de cima para baixo) a criação de um ístemo entre uma ilha beirando o litoral, a eliminação de um golfo estreito e de um lago pequeno e, finalmente, o *fechamento* de uma baia de acesso estreito junto ao oceano.

Para todo $B \in <\{A\}>$, $<\{B\}> = <\{A\}>$ e, conseqüentemente, $\gamma_B = \gamma_A$. Isto mostra que na definição de uma abertura ou de um fechamento por um elemento estruturante, a posição relativa entre o elemento estruturante e a origem não importa. Por esta razão, na notação de elemento estruturante para as aberturas e fechamentos, podemos esquecer de indicar a posição da origem.

Na proposição seguinte, vamos resumir algumas propriedades das arberturas por um elemento estruturante.

Proposição 6.20 (propriedades das aberturas por um elemento estruturante) – Seja B um subconjunto de um grupo Abeliano E. Seja γ_B a abertura pelo elemento estruturante B, isto é,

$$\gamma_B(X) = (X \ominus B) \oplus B \quad (X \in \mathcal{P}),$$

então valem as seguintes propriedades. Para todo B, B_1 e B_2 em $\mathcal{P}$,

(1) $\gamma_B(X) = \bigcup_{x \in E \text{ e } B + x \subset X} B + x \quad (X \in \mathcal{P})$

(2) $X_1 \subset X_2 \Rightarrow \gamma_B(X_1) \subset \gamma_B(X_2) \quad (X_1, X_2 \in \mathcal{P})$ (isotonia)

(3) $\gamma_B \leq \iota$ (anti–extensividade)

(4) $\gamma_B \gamma_B = \gamma_B$ (idempotência)

(5) $\mathrm{Inv}(\gamma_B) = \delta_B(\mathcal{P})$. (domínio de invariância)

(6) $\gamma_B(\sup \mathcal{X}) = \sup \gamma_B(\mathcal{X}) \quad (\mathcal{X} \subset \delta_B(\mathcal{P}))$ (propriedade dos abertos)

(7) $\gamma_B(\inf \mathcal{X}) \subset \inf \gamma_B(\mathcal{X}) \quad (\mathcal{X} \subset \mathcal{P})$ (isotonia)

(8) $\tau_u \gamma_B = \gamma_B \tau_u \quad (u \in E)$ (invariância por translação)

(9) $\gamma_{B_1} \vee \gamma_{B_2} = \gamma_{<B_1> \cup <B_2>}$ (sup–fechamento)

(10) $\gamma_{\overline{<B_1> \cap <B_2>}} \leq \gamma_{B_1} \wedge \gamma_{B_2}$. □

Prova – A Propriedade (1) decorre da aplicação do resultado do Exercício 6.3 ao caso invariante por translação ou ainda é uma consequência da Proposição 6.19.

As Propriedades (2) a (4) decorrem da Proposição 6.13.

A Propriedade (5) é o resultado da Proposição 6.14.

A Propriedade (6) decorre da Proposição 6.2.

A Propriedade (7) decorre da isotonia de γ_B e da Proposição 3.1.

A Propriedade (8) decorre do fato que a operação de composição é fechada em relação aos operadores invariantes por translação.

As Propriedades (9) e (10) decorrem da Proposições 6.7 e 6.11. □

A Figura 6.14 ilustra a Propriedade (6), isto é, a união de aberto é aberto. A Figura 6.15 ilustra a Propriedade (7), isto é, a abertura da interseção de dois subconjuntos é contida na interseção de suas aberturas. A abertura por A da interseção de X_1 e X_2 é o ínfimo de $\{X_1, X_2\}$ relativamente a coleção $\overline{<\{A\}>}$. Nesta figura os subconjuntos X_1 e X_2 são abertos, então sua interseção coincide com a interseção de suas aberturas (mas não coincide com a abertura da interseção).

Na proposição seguinte, vamos resumir algumas propriedades dos fechamentos por um elemento estruturante.

Proposição 6.21 (propriedades dos fechamentos por um elemento estruturante) – Seja B um subconjunto de um grupo Abeliano E. Seja ϕ_B o fechamento pelo elemento estruturante B, isto é,

$$\phi_B(X) = (X \oplus B) \ominus B \quad (X \in \mathcal{P}),$$

então valem as seguintes propriedades. Para todo B, B_1 e B_2 em $\mathcal{P}$,

(1) $\phi_B(X) = \bigcap_{x \in E \text{ e } B + x \subset X^c} (B + x)^c \quad (X \in \mathcal{P})$

(2) $X_1 \subset X_2 \Rightarrow \phi_B(X_1) \subset \phi_B(X_2) \quad (X_1, X_2 \in \mathcal{P})$ (isotonia)

(3) $\iota \leq \phi_B$ (extensividade)

(4) $\phi_B \phi_B = \phi_B$ (idempotência)

(5) $\text{Inv}(\phi_B) = \epsilon_B(\mathcal{P})$. (domínio de invariância)

(6) $\phi_B(\inf \mathcal{X}) = \inf \phi_B(\mathcal{X}) \quad (\mathcal{X} \subset \epsilon_B(\mathcal{P}))$ (propriedade dos fechados)

(7) $\sup \phi_B(\mathcal{X}) \subset \phi_B(\sup \mathcal{X}) \quad (\mathcal{X} \subset \mathcal{P})$ (isotonia)

(8) $\tau_u \phi_B = \phi_B \tau_u \quad (u \in E)$ (invariância por translação)

□

Prova – A prova das propriedades dos fechamentos decorrem das provas das propriedades das aberturas, por dualidade. □

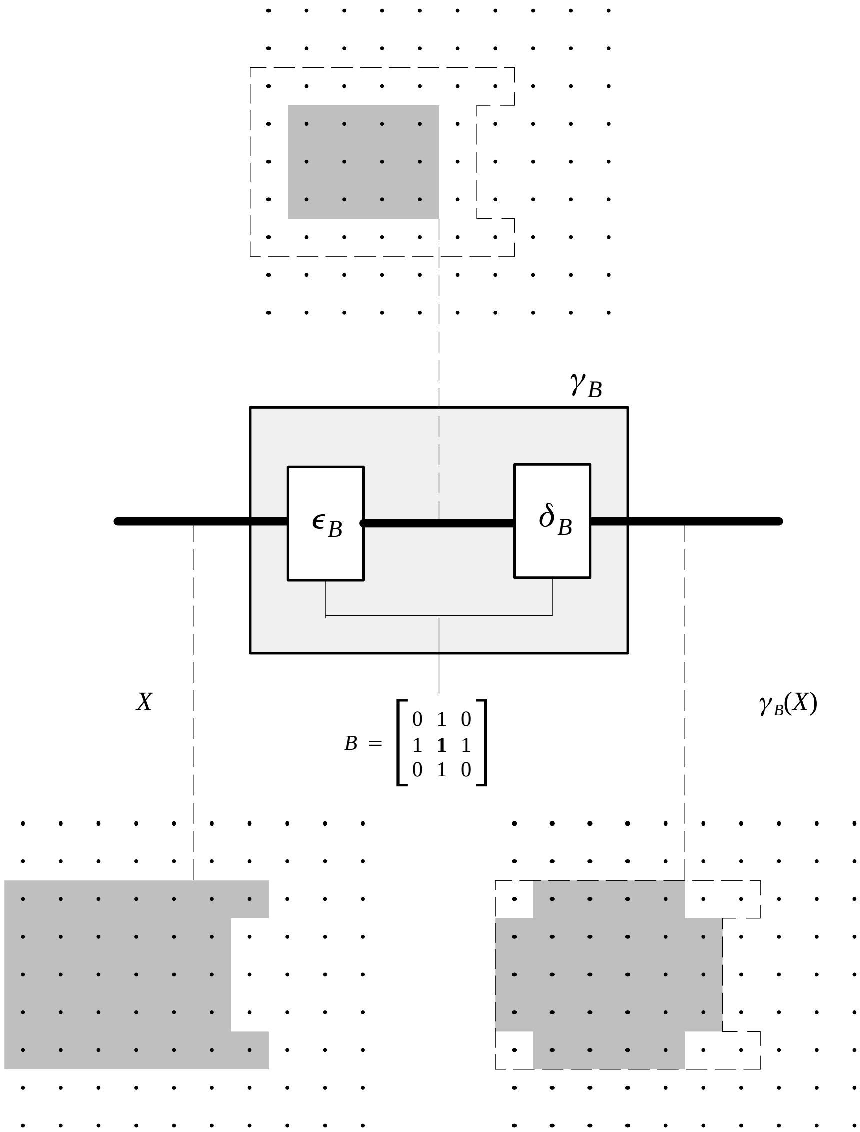

Fig. 6.9 – Abertura morfológica i.t. de um subconjunto que "toca as bordas do domínio".

Observamos que se $\boldsymbol{X}$ é um conjunto de subcoleções invariantes por translação então $\bigcup_{\mathfrak{B} \in \boldsymbol{X}} \mathfrak{B}$ e $\bigcap_{\mathfrak{B} \in \boldsymbol{X}} \mathfrak{B}$ são subcoleções invariantes por translação.

Para toda subcoleção $\mathfrak{B}$ de $\mathcal{P}$, $\overline{<\mathfrak{B}>}$ é uma subcoleção sup–fechada e invariante por translação. Em outros termos, a imagem de $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ através de $\mathfrak{B} \mapsto \overline{<\mathfrak{B}>}$ é contida no conjunto das subcoleções sup–fechadas e invariantes por translação.

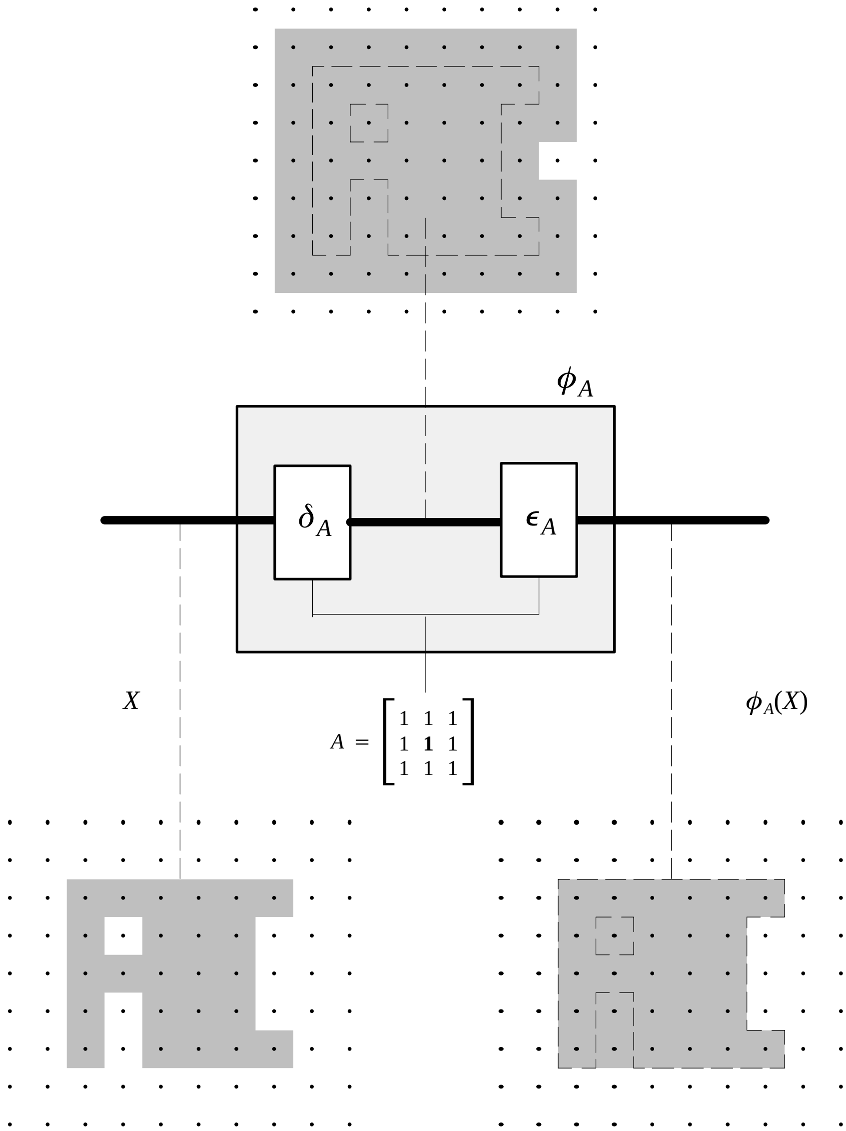

Fig. 6.10 – Fechamento morfológico de um subconjunto.

Vamos provar que se $\mathcal{B}$ é uma subcoleção sup–fechada e invariante por translação, então $\overline{<\mathcal{B}>} = \mathcal{B}$. Temos,

$$\begin{aligned} \overline{<\mathcal{B}>} &= \overline{\mathcal{B}} && (\mathcal{B} \text{ é i.t.}) \\ &= \mathcal{B}. && (\mathcal{B} \text{ é sup–fechado}) \end{aligned}$$

Em outros termos, se $\mathcal{B}$ é uma subcoleção sup–fechada e invariante por translação, então é um invariante no mapeamento $\mathcal{B} \mapsto \overline{<\mathcal{B}>}$.

Geralmente, o composto de aberturas (resp. fechamento) não é uma abertura (resp. fechamento). No entanto, a composição do fechamento $\mathcal{B} \mapsto \overline{\mathcal{B}}$ pelo fechamento $\mathcal{B} \mapsto <\mathcal{B}>$ é um fechamento.

Proposição 6.22 (fechamento das subcoleções de subconjuntos) – Seja E um grupo Abeliano. O mapeamento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, $\mathcal{B} \mapsto \overline{<\mathcal{B}>}$ é um fechamento. □

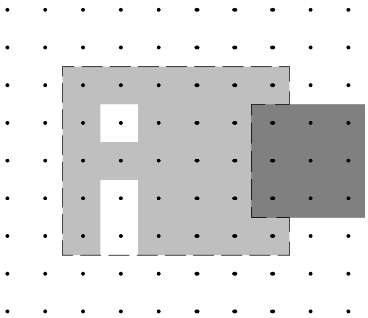

Fig. 6.11 – Modo de construir o fechado.

Prova – O mapeamento $\mathfrak{B} \mapsto \overline{<\mathfrak{B}>}$ é isotônico e extensivo como resultado da composição de mapeamentos isotônicos e extensivos. Vamos provar a idempotência. Para todo $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$,

$$\begin{aligned} \overline{<\overline{<\mathfrak{B}>}>} &= \overline{\overline{<\mathfrak{B}>}} && (\overline{<\mathfrak{B}>} \text{ é i.t.}) \\ &= \overline{<\mathfrak{B}>}, && (\mathfrak{B} \mapsto \overline{\mathfrak{B}} \text{ é idempotente}) \end{aligned}$$

isto é, $\mathfrak{B} \mapsto \overline{<\mathfrak{B}>}$ é idempotente.

Em outros termos, $\mathfrak{B} \mapsto \overline{<\mathfrak{B}>}$ é um fechamento. □

Para provar o resultado do Matheron, precisamos de uma última proposição.

Proposição 6.23 (domínio de invariância da união de aberturas por elementos estrurantes) – Seja E um grupo Abeliano. Seja $\mathfrak{B}$ uma subcoleção qualquer de $\mathcal{P}(E)$, então

$$\mathrm{Inv}(\bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \gamma_B) = \overline{<\mathfrak{B}>}.$$ □

Prova – Para todo $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(\bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \gamma_B) &= \overline{\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \mathrm{Inv}(\gamma_B)} && \text{(Proposições 6.6 e 6.10)} \\ &= \overline{\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \overline{<\{B\}>}} && \text{(Proposição 6.19)} \\ &= \overline{<\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \overline{<\{B\}>}>} && (\overline{<\{B\}>} \text{ é i.t.}) \\ &= \overline{<\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \{B\}>} && \text{(Exercício 6.1)} \\ &= \overline{<\mathfrak{B}>}. && \text{(representação de } \mathfrak{B} \text{ por uma união de singletons)} \end{aligned}$$

□

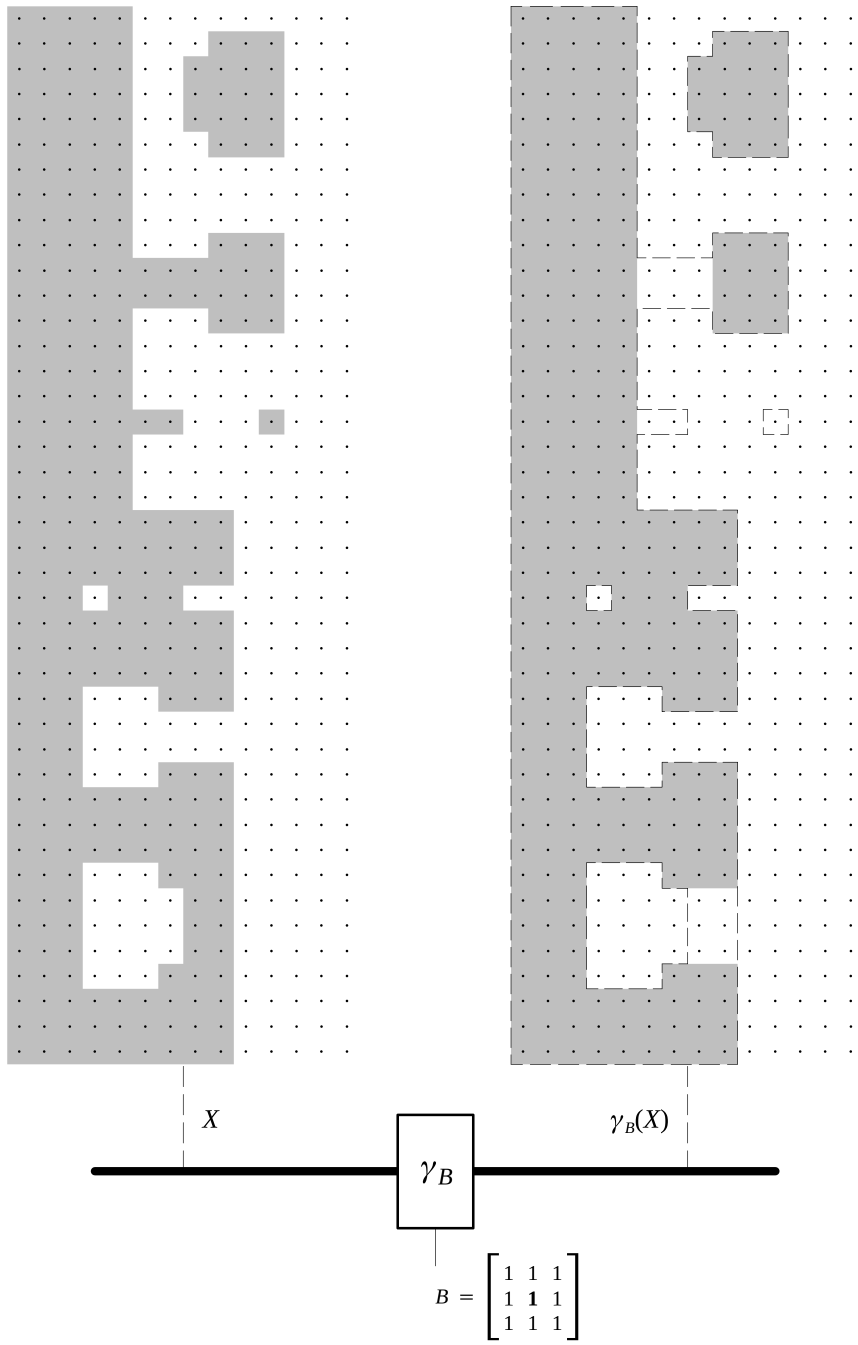

Fig. 6.12 – Efeitos da abertura.

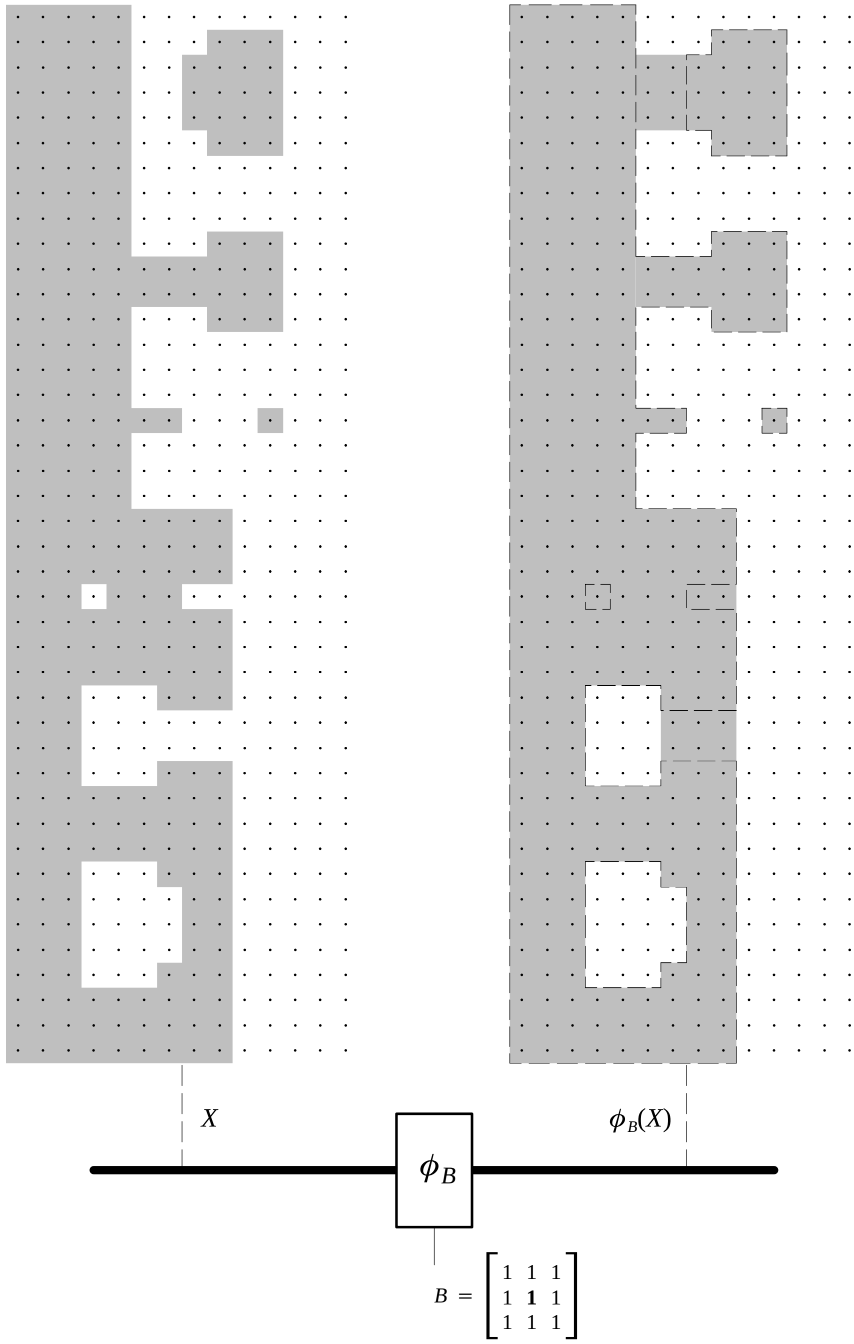

Fig. 6.13 – Efeitos do fechamento.

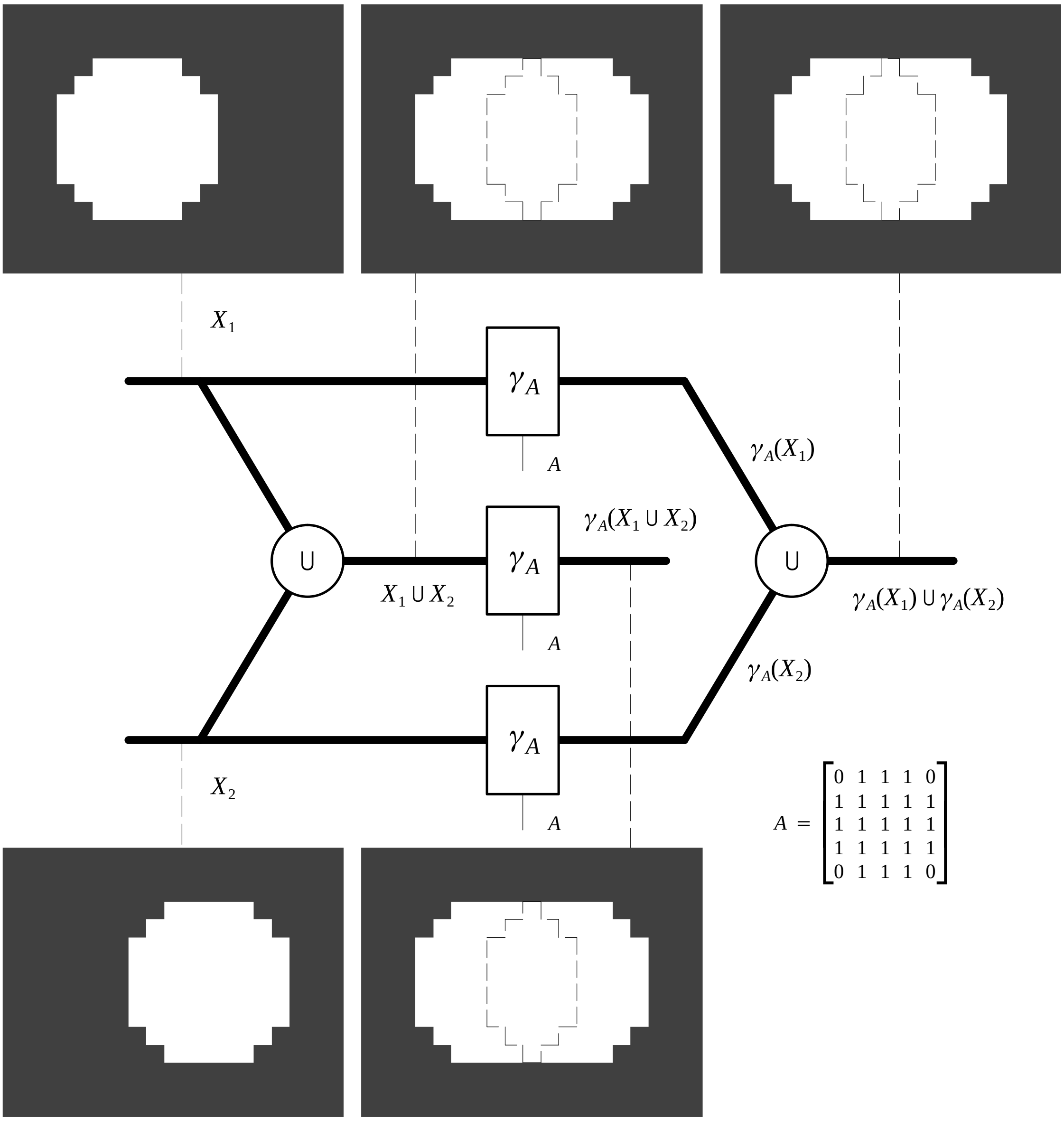

Fig. 6.14 – Propriedade da união de abertos.

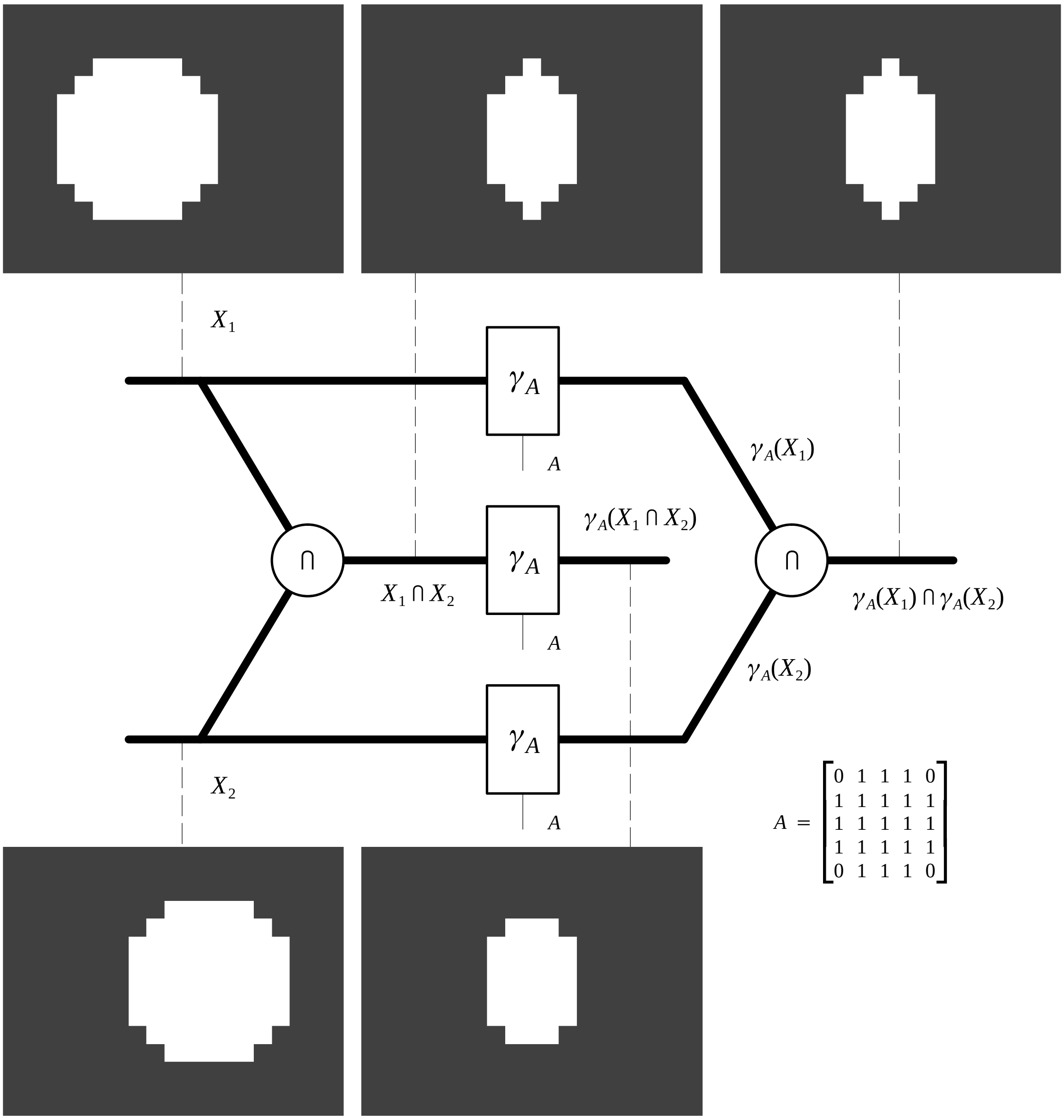

Fig. 6.15 – Isotonia da abertura.

Podemos agora enunciar e provar o resultado do Matheron.

Proposição 6.24 (representação das aberturas invariantes por translação) – Seja E um grupo Abeliano. Seja $\mathcal{B}$ uma subcoleção de $\mathcal{P}(E)$ e seja γ o operador sobre $\mathcal{P}(E)$ dado por

$$\gamma = \bigvee_{B \in \mathcal{B}} \gamma_B,$$

então

$$\gamma \in \Gamma' \quad \text{e} \quad \text{Inv}(\gamma) = \overline{<\mathcal{B}>}.$$

Inversamente, seja γ uma abertura invariante por translação, isto é, $\gamma \in \Gamma'$ então

$$\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E),\ \gamma = \bigvee_{B \in \mathcal{B}} \gamma_B\ . \qquad \square$$

Prova – Para toda subcoleção de $\mathcal{P}(E)$, pela Proposição 6.1, o operador $\gamma = \bigvee_{B \in \mathcal{B}} \gamma_B$ é uma abertura representada como uma união de aberturas. Ele é um operador i.t. representado como uma união de operadores i.t.. Isto é, $\gamma \in \Gamma'$. Pela Proposição 6.23, $\text{Inv}(\gamma) = \overline{<\mathcal{B}>}$.

Inversamente, para toda abertura i.t. γ, pela Proposição 6.2, $\text{Inv}(\gamma)$ é sup–fechado e pela Proposição 6.16, $\text{Inv}(\gamma)$ é i.t.. Isto é, $\text{Inv}(\gamma)$ é um invariante no mapeamento $\mathcal{B} \mapsto \overline{<\mathcal{B}>}$. Pela Proposição 6.22, $\mathcal{B} \mapsto \overline{<\mathcal{B}>}$ é um fechamento, então $\text{Inv}(\gamma)$ pertence a imagem de $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ através de $\mathcal{B} \mapsto \overline{<\mathcal{B}>}$. Em outros termos, por alguma subcoleção $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(E)$ $\text{Inv}(\gamma) = \overline{<\mathcal{B}>}$ ou, ainda, pelas Proposições 6.5 e 6.23, $\gamma = \bigvee_{B \in \mathcal{B}} \gamma_B$. $\square$

A Figura 6.16 ilustra uma aplicação de uma abertura (algébrica) invariante por translação obtida como união de duas aberturas por dois elementos estuturantes distintos. Nesta figura, observamos que com esta abertura podemos extrair da imagem X as partes alongadas verticalmente e inclinadas a 45 graus.

6.4 Aberturas e fechamentos condicionalmente invariantes por translação

Em certas aplicações, as aberturas e os fechamentos invariantes por translação podem apresentar efeitos de bordas indesejáveis porque num ponto x de "borda" de E o elemento estruturante transladado $B + x$ geralmente cobre simultaneamente as imediações da "borda" considerada e da "borda oposta". Na prática, usa–se então, aberturas e fechamentos que têm um comportamento similar aos operadores i.t. no "centro" de E e que nunca tem o efeito de "juntar" as "bordas opostas".

Seja $(\mathbf{Z}^2, +)$ o grupo Abeliano de pares ordenados de inteiros e seja E um retângulo de $\mathbf{Z}^2$.

Definição 6.7 (abertura e fechamento condicionalmente invariantes por translação) – Uma *abertura* (resp. *fechamento*) *condicionalmente invariante por translação* (*c.i.t*) é uma abertura (morfológica) γ_b (resp. fechamento (morfológico) ϕ_b) por uma função estruturante b condicionalmente invariantes por translação. $\square$

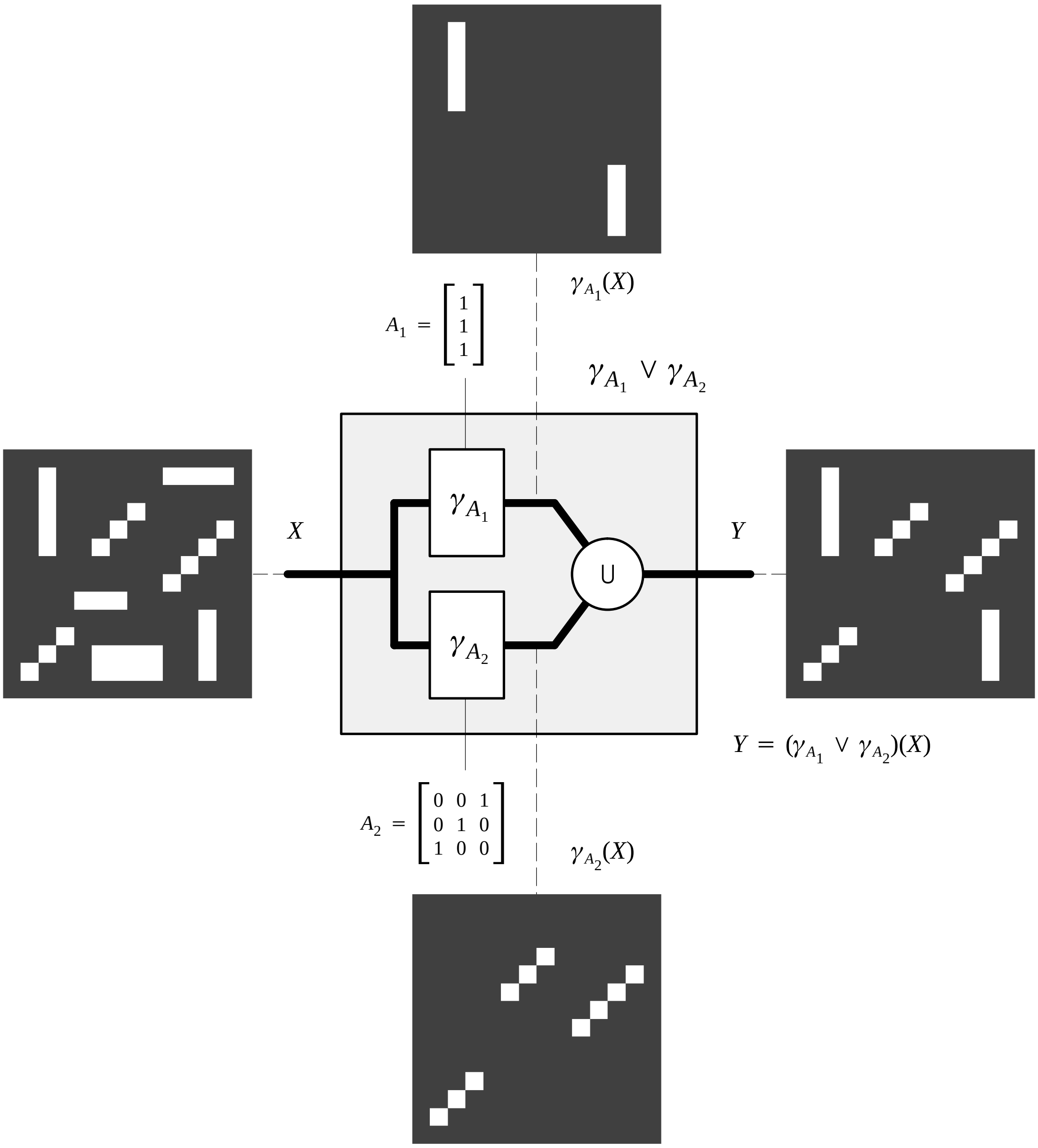

Fig. 6.16 – Abertura algébrica.

Como já comentamos na Seção 4.4, cada função c.i.t. pode ser caracterizado por um subconjunto B de $E \oplus E^t$. Para todo $B \in \mathcal{P}(E \oplus E^t)$, denotamos por b_B a função c.i.t. definida por

$$b_B(y) = (B + y) \cap E \quad (y \in E).$$

Denotamos então por γ_B (resp. ϕ_B) a aberura (resp. fechamento) c.i.t. por b_B.

Em outros termos, temos $\gamma_B = \delta_B \epsilon_B$ e $\phi_B = \epsilon_B \delta_B$, onde δ_B e ϵ_B são a dilatação e a erosão c.i.t. por B.

A Figura 6.17 mostra uma abertura condicionalmente invariante por translação pelo losângulo 3×3 (a cruz). Comparando as Figuras 6.9 e 6.17, observamos que a abertura c.i.t. ao contrário da abertura i.t. não altera a parte do subconjunto que "toca a borda do domínio". No caso invariante por translação, todos os pontos X são tratados igualmente, quer sejam "pontos de bordas ou não". Dependendo da aplicação, pode–se preferir uma ou outra abertura.

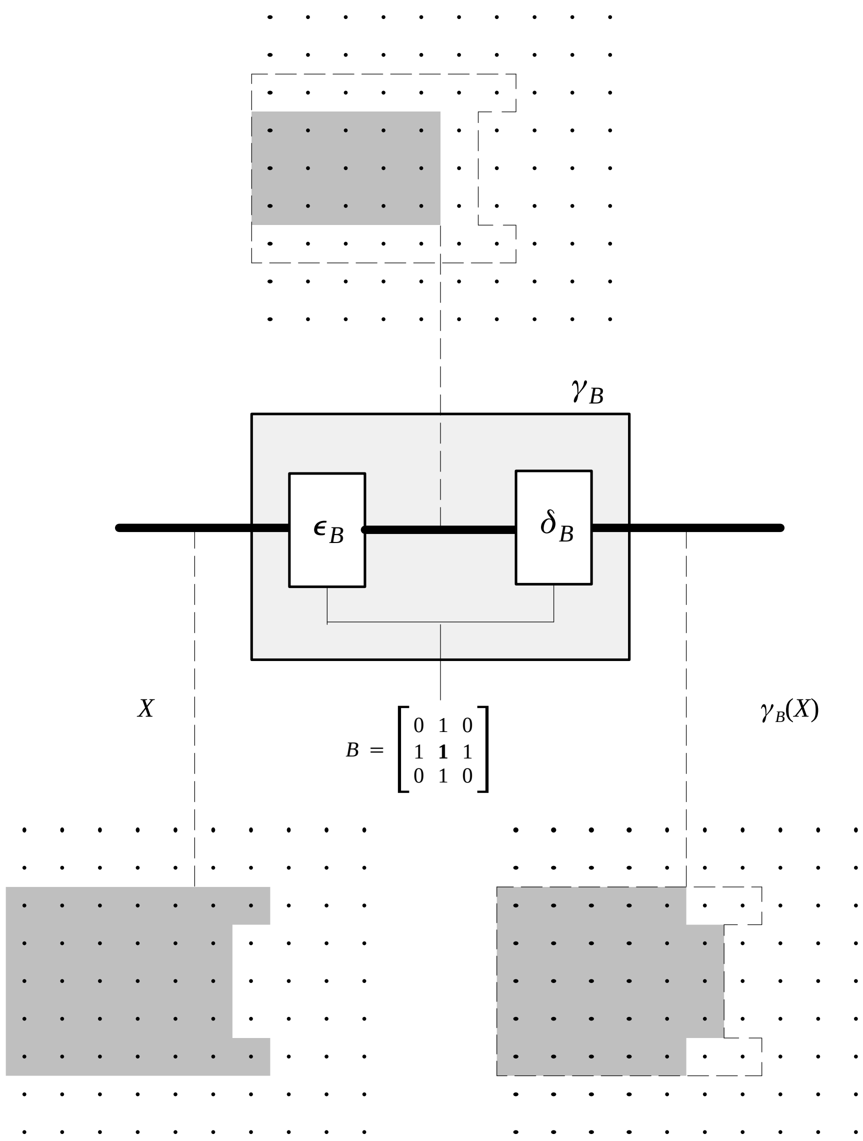

Fig. 6.17 – Abertura morfológica c.i.t. de um subconjunto que "toca as bordas do domínio".