Capítulo 4

Operadores invariantes por translação

As funções estruturantes do capítulo anterior podem ser vistas como uma maneira de definir uma noção de vizinhança para os pontos do conjunto E. Por exemplo, seja a uma função estruturante definida sobre E. O conjunto $a(x)$ pode ser visto como a vizinhança do ponto x. Neste capítulo, vamos *estruturar* o conjunto E de maneira a podermos definir uma certa *regularidade* entre vizinhanças de pontos distintos. A estrutura considerada é a de grupo Abeliano.

Com esta estrutura é possível definir os operadores de translação e transposição e, finalmente~~,~~ a classe dos *operadores invariantes por translação*. Esta classe foi a primeira estudada em Morfologia Matemática, e possue muitas propriedades matemáticas interessantes.

Neste capítulo, damos uma atenção especial a situação real onde o domínio das imagens é finito. Para tanto, será introduzida a noção de adição módulo n. A fim de estruturarmos o domínio das imagens segundo um grupo Abeliano com a liberdade de escolha do elemento neutro, usa~~re~~mos a noção de espaço afim ligado a um grupo Abeliano.

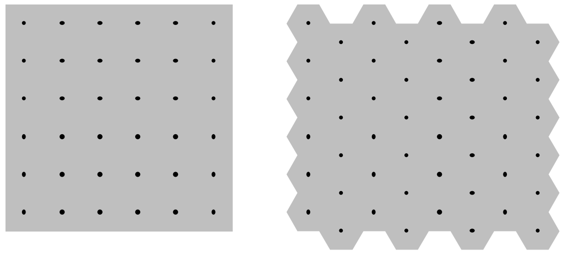
As operações de adição e subtração de Minkowski são apresentadas e utilizadas explicitamente na caracterização das dilatações invariantes por translação.

Em certas aplicações, os operadores elementares invariantes por translação podem apresentar efeitos de bordas indesejáveis, por isso introduzimos também a classe dos operadores *condicionalmente invariantes por translação*.

4.1 Translações e transposição

Seja $\mathbf{Z}$ o conjunto dos inteiros. Seja $\mathbf{Z}^2$ o produto Cartesiano $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, isto é, o conjunto dos pares ordenados de inteiros. A maneira mais simples de definirmos a noção de vizinhança é considerar o conjunto E como sendo a imagem de um *retângulo* de $\mathbf{Z}^2$ através de um mapeamento bijetor.

Sejam n_1 e n_2 dois inteiros positivos, representando o tamanho do retângulo. A Figura 4.1 mostra dois conjuntos E ou, nos referindo às imagens, duas grades particulares. Em (a), temos um exemplo de uma grade *quadrada* com $(n_1, n_2) = (6, 6)$ e, em (b), de uma grade *hexagonal* com $(n_1, n_2) = (12, 4)$ ou $(n_1, n_2) = (6, 8)$. Neste caso, dizemos que o conjunto ou grade E tem o *tamanho* $n_1 \times n_2$.



(a) quadrada (b) hexagonal

Fig. 4.1 – Dois tipos de grade.

Queremos estruturar o conjunto E segundo um grupo Abeliano, provendo E de uma adição cujo elemento neutro seja um ponto arbitrário de E. Para isto, vamos partir inicialmente do retângulo $\mathbf{Ret}(n_1, n_2) = [0, ..., n_1 - 1] \times [0, ..., n_2 - 1]$ e o prover de uma adição.

O conjunto $\mathbf{Z}$ provido da adição entre números inteiros forma um *grupo Abeliano*, denotado $(\mathbf{Z}, +)$. Em outros termos, a adição verifica os axiomas abaixo [CaRaCo63].

Para todo elemento a, b e c em $\mathbf{Z}$,

(1) $a + b = b + a$ (*comutatividade*)

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*associatividade*)

(3) $\exists e \in \mathbf{Z},\ a + e = e + a = a$ (*lei do elemento neutro*)

(4) $\exists a' \in \mathbf{Z},\ a + a' = a' + a = e.$ (*lei do oposto*)

O elemento e, chamado de *elemento neutro*, é o elemento 0 de $\mathbf{Z}$. O elemento a', *oposto de* a, é denotado $-a$.

Os três últimos axiomas definem um *grupo*. Isto é, um grupo Abeliano é um grupo comutativo.

Exercício 4.1 (unicidade do elemento neutro) – Prove que o elemento neutro é único. □

Prova – Sejam e_1 e e_2 dois elemento neutros,

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1 + e_2 && (e_2 \text{ é elemento neutro}) \\ &= e_2\,. && (e_1 \text{ é elemento neutro}) \end{aligned}$$

□

Exercício 4.2 (unicidade do oposto) – Usando os axiomas de grupo, prove que o oposto é único. □

Prova – Sejam a_1 e a_2 dois opostos de a,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + e && (\text{lei do elemento neutro}) \\ &= a_1 + (a + a_2) && (a_2 \text{ é oposto de } a) \\ &= (a_1 + a) + a_2 && (\text{associatividade}) \end{aligned}$$

$$= e + a_2 \qquad (a_1 \text{ é oposto de } a)$$
$$= a_2\,. \qquad \text{(lei do elemento neutro)}$$

□

A *diferença entre os inteiros a e b* é o elemento de **Z**, denotado $a - b$ e dado por

$$a - b = a + (-b).$$

A adição entre inteiros extende–se a pares ordenados de inteiros. Sejam (a_1, a_2) e (b_1, b_2) dois pares ordenados de inteiros. O conjunto $\mathbf{Z}^2$ provido da adição definida por

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

é um grupo Abeliano. O elemento neutro é o par $(0, 0)$, o oposto de (a_1, a_2) é $(-a_1, -a_2)$, que é denotado $-(a_1, a_2)$.

Para prover o retângulo $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ de uma adição que verifique os axiomas de um grupo Abeliano, precisamos introduzir a noção de adição módulo n.

Definição 4.1 (adição módulo n) – Seja n um inteiro positivo. Seja $\mathbf{Int}(n) = [0, ..., n-1]$ um intervalo de **Z** de tamanho n. A *soma módulo n* dos elementos a e b em $\mathbf{Int}(n)$ é o elemento de $\mathbf{Int}(n)$ denotado $a \underset{n}{+} b$ e dado por

$$a \underset{n}{+} b = \begin{cases} a + b & \text{se } a + b \leq n - 1 \\ a + b - n & \text{c.c.} \end{cases}$$

ou ainda,

$$a \underset{n}{+} b = \text{resto}((a + b)/n).$$

A *adição módulo n* em $\mathbf{Int}(n)$, denotada $\underset{n}{+}$, é o mapeamento dado por

$$(a, b) \mapsto a \underset{n}{+} b.$$

□

Denotaremos a soma módulo n de a e b simplesmente $a + b$, quando não houver dúvida sobre o tamanho do intervalo.

O elemento neutro da adição módulo n em $\mathbf{Int}(n)$ é 0. O oposto módulo n de a é denotado $\underset{n}{-} a$ e dado por

$$\underset{n}{-} a = \begin{cases} 0 & \text{se } a = 0 \\ n - a & \text{c.c..} \end{cases}$$

O intervalo $\mathbf{Int}(n)$ provido da adição módulo n forma um grupo Abeliano.

Exercício 4.3 (lei do oposto) – Seja a um elemento do intervalo $\mathbf{Int}(n)$. Prove que o elemento $\underset{n}{-} a$ definido acima é o oposto módulo n de a. □

Usando o mesmo mecanismo de extenção da adição de **Z** para $\mathbf{Z}^2$, a adição módulo n em **Int**(n) extende–se aos pares em **Ret**(n_1, n_2). Sejam (a_1, a_2) e (b_1, b_2) dois pares em **Ret**(n_1, n_2), o conjunto **Ret**(n_1, n_2) provido da *adição módulo* (n_1, n_2), denotada $\underset{(n_1,n_2)}{+}$ e definida por

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1, a_2) \underset{(n_1,n_2)}{+} (b_1, b_2) = (a_1 \underset{n_1}{+} b_1, a_2 \underset{n_2}{+} b_2),$$

forma um grupo Abeliano. O elemento neutro é o par $(0, 0)$, o oposto módulo (n_1, n_2) de (a_1, a_2) é $(\underset{n_1}{-} a_1, \underset{n_2}{-} a_2)$, que é denotado $\underset{(n_1,n_2)}{-}(a_1, a_2)$.

A *diferença entre os pares a e b em* **Ret**(n_1, n_2) é o par de **Ret**(n_1, n_2), denotado $a \underset{(n_1,n_2)}{-} b$ e dado por

$$a \underset{(n_1,n_2)}{-} b = a \underset{(n_1,n_2)}{+} (\underset{(n_1,n_2)}{-} b).$$

Denotaremos a soma módulo (n_1, n_2) de a e b em **Ret**(n_1, n_2) simplesmente $a + b$, quando não houver dúvida sobre o tamanho do retângulo. Neste caso, denotaremos o oposto módulo (n_1, n_2) de a simplesmente, $-a$ e a diferença módulo (n_1, n_2) de a e b por $a - b$.

Vamos considerar dois exemplos práticos de conjunto E formando um *espaço afim ligado ao grupo Abeliano* **Ret**(n_1, n_2). Os elementos de **Ret**(n_1, n_2) serão chamados, por abuso de linguagem, de vetores (apesar de não serem elementos de um espaço vetorial) e os elementos de E serão chamados de pontos. Para ajudar a fazer a diferença entre vetores e pontos, os vetores serão sobrelinhados por uma seta quando for conveniente.

O primeiro conjunto E considerado é o intervalo **Int**(n). Na prática, este conjunto poderia ser os endereços de n pixels armazenados na memória de um computador.

Proposição 4.1 (intervalo como espaço afim ligado ao retângulo) – Seja $n = n_1 n_2$. O conjunto **Int**(n) provido do mapeamento de **Int**(n) × **Int**(n) em **Ret**(n_1, n_2): $(x, y) \mapsto \vec{xy}$, definido por

$$\vec{xy} = (\mathrm{int}(\frac{y}{n_2}) \underset{n_1}{-} \mathrm{int}(\frac{x}{n_2}), \mathrm{resto}(\frac{y}{n_2}) \underset{n_2}{-} \mathrm{resto}(\frac{x}{n_2})),$$

é um *espaço afim ligado ao grupo Abeliano* **Ret**(n_1, n_2), isto é, o mapeamento $(x, y) \mapsto \vec{xy}$ satisfaz aos três axiomas abaixo

(1) para todo x em **Int**(n) e $\vec{u}$ em **Ret**(n_1, n_2), $\exists y \in E,\ \vec{xy} = \vec{u}$

(2) $\vec{xy} = (0, 0) \Rightarrow x = y$

(3) para todo x, y e z em **Int**(n), $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$. (*relação de Chasles*)

□

Prova – O resultado enunciado decorre da definição de $\vec{xy}$. □

Pela relação de Chasles, o oposto de $\vec{xy}$ é $\vec{yx}$, isto é, $-\vec{xy} = \vec{yx}$.

O elemento y do primeiro axioma da Proposição 4.1 é único [CaRaCo65, p. 88]. Isto permite definir uma operação externa sobre **Int**(n).

Definição 4.2 (soma de um ponto por um vetor) – Seja E um espaço afim ligado a $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. Sejam x um ponto em E e $\vec{u}$ um vetor em $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. A *soma de um ponto x por um vetor $\vec{u}$* é o ponto de E, denotado $x \underset{E}{+} \vec{u}$ (ou simplesmente $x + \vec{u}$, quando não houver dúvida sobre o espaço afim considerado) e dado por

$$y = x + \vec{u} \Leftrightarrow \vec{xy} = \vec{u}.$$ □

Assim, para todo x e y em E, $y = x + \vec{xy}$.

Para um dado ponto o em E, o mapeamento $x \mapsto \vec{ox}$ é uma bijeção de E em $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ e sua inversa é o mapeamento $\vec{u} \mapsto o + \vec{u}$.

Proposição 4.2 (propriedades da soma de um ponto por um vetor) – Para todo ponto x em E,

(1) $x + (0, 0) = x$

(2) para todo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$, $x + (\vec{u} + \vec{v}) = (x + \vec{u}) + \vec{v}$. □

Prova – A propriedade (1) decorre do segundo axioma da Proposição 4.1. A propriedade (2) decorre do axioma (3) de espaço afim: para todo x em E e todo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned}
z = x + (\overrightarrow{u + v}) &\Leftrightarrow \vec{xz} = \vec{u} + \vec{v} && \text{(Definição 4.2)}\\
&\Leftrightarrow \vec{xz} = \vec{u} + \vec{v} \ \text{ e } \ y = x + \vec{u} && \text{(equivalência lógica)}\\
&\Leftrightarrow \vec{xy} + \vec{yz} = \vec{u} + \vec{v} \ \text{ e } \ y = x + \vec{u} && \text{(relação de Chasles)}\\
&\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{yz} = \vec{u} + \vec{v} \ \text{ e } \ y = x + \vec{u} && \text{(Definição 4.2)}\\
&\Leftrightarrow \vec{yz} = \vec{v} \ \text{ e } \ y = x + \vec{u} && \text{(propriedade da soma)}\\
&\Leftrightarrow z = y + \vec{v} \ \text{ e } \ y = x + \vec{u} && \text{(Definição 4.2)}\\
&\Leftrightarrow z = (x + \vec{u}) + \vec{v}. && \text{(equivalência lógica)}
\end{aligned}$$

□

Seja x um ponto em $\mathbf{Int}(n)$ e seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor de $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$, pelas definições de $\vec{xy}$ e de soma de um ponto por um vetor,

$$x \underset{\mathbf{Int}(n)}{+} \vec{u} = n_2(u_1 \underset{n_1}{+} \mathrm{int}(\frac{x}{n_2})) + u_2 \underset{n_2}{+} \mathrm{resto}(\frac{x}{n_2}).$$

Por exemplo, se $n_1 = n_2 = 3$, $x = 6$ e $\vec{u} = (2, 2)$, então

$$6 + (2, 2) = 3(2 \underset{3}{+} 2) + 2 \underset{3}{+} 0) = 3(1) + 2 = 5.$$

Por outro lado, verificamos que

$$\vec{65} = (1 \underset{3}{-} 2, 2 \underset{3}{-} 0) = (2, 2).$$

O segundo conjunto E considerado é o próprio retângulo $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. Na prática, este conjunto poderia ser as coordenadas dos pixels dispostos numa grade quadrada.

Proposição 4.3 (retângulo como espaço afim canônico) – O conjunto $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ provido do mapeamento de $\mathbf{Ret}(n_1, n_2) \times \mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ em $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$: $(x, y) \mapsto \vec{xy}$, definido por

$$\vec{xy} = y \underset{(n_1, n_2)}{-} x.$$

é um *espaço afim canônico* (ligado a ele próprio). □

Prova – O resultado enunciado decorre da definição de $\vec{xy}$. □

Seja x um ponto em $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ e seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor de $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$, pelas definições de $\vec{xy}$ e de soma de um ponto por um vetor,

$$x \underset{\mathbf{Ret}(n_1,n_2)}{+} \vec{u} = x \underset{(n_1,n_2)}{+} u.$$

Por exemplo, se $n_1 = n_2 = 3$, $x = (2, 0)$ e $\vec{u} = (2, 2)$, então

$$(2, 0) + (2, 2) = (2, 0) \underset{(3,3)}{+} (2, 2) = (1, 2).$$

Por outro lado, verificamos que

$$\overrightarrow{(2, 0)(1, 2)} = (1 \underset{3}{-} 2, 2 \underset{3}{-} 0) = (2, 2).$$

Seja E um espaço afim ligado a $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. Podemos estruturar E para ser um grupo Abeliano cujo elemento neutro seja um ponto qualquer que chamaremos de *origem* e denotaremos o.

Definição 4.3 (adição num espaço afim ligado ao retângulo) – Seja E um espaço afim ligado a $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. Seja o um ponto qualquer de E e sejam a e b dois pontos de E. A s*oma, relativa à origem o, dos pontos a e b em E* é o ponto de E, denotado $a \overset{o}{\underset{E}{+}} b$ (ou simplesmente $a + b$, quando não houver dúvida sobre o ponto origem e o espaço afim considerado) e dado por

$$a \overset{o}{\underset{E}{+}} b = o + (\vec{oa} \underset{(n_1,n_2)}{+} \vec{ob}).$$

A *adição, relativa à origem o, de dois pontos* de E, denotada $\overset{o}{\underset{E}{+}}$, é o mapeamento dado por

$$(a, b) \mapsto a \overset{o}{\underset{E}{+}} b.$$ □

A Figura 4.2 mostra a construção da soma, relativa à origem o, de dois pontos a e b em E.

Proposição 4.4 (grupo Abeliano sobre um espaço afim ligado ao retângulo) – Seja E um espaço afim ligado a $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. Seja o um ponto qualquer de E. O conjunto E provido da adição $\overset{o}{\underset{E}{+}}$ relativa à origem o é um grupo Abeliano. O elemento neutro é o ponto o. O oposto de um ponto a, relativo à origem o, denotado $\overset{o}{\underset{E}{-}} a$, é dado por

$$\overset{o}{\underset{E}{-}} a = o + \vec{ao}.$$ □

Prova – Para um dado ponto o e para todo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$,

$$(o + \vec{u}) \overset{o}{\underset{E}{+}} (o + \vec{v}) = o + (\vec{u} \underset{(n_1,n_2)}{+} \vec{v}).$$

Isto prova que a bijeção $\vec{u} \mapsto o + \vec{u}$ é um isomorfismo de $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$, provido da adição $\underset{(n_1,n_2)}{+}$ em E, provido da operação $\overset{o}{\underset{E}{+}}$. Já que $(\mathbf{Ret}(n_1, n_2), \underset{(n_1,n_2)}{+})$ é um grupo Abeliano, o mesmo ocorre com $(E, \overset{o}{\underset{E}{+}})$. Pela propriedade (1) da Proposição 4.2, o elemento neutro de E é $o + (0,0) = o$. O oposto de a em E é $o + (-\vec{oa}) = o + \vec{ao}$. □

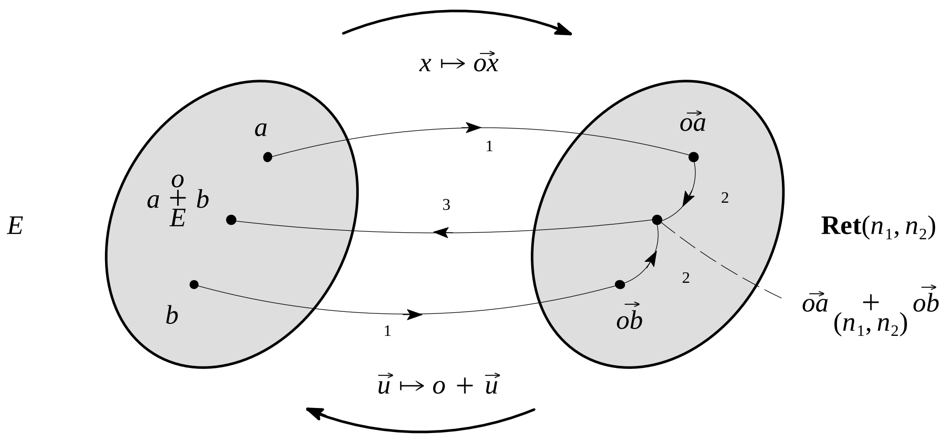


Fig. 4.2 – Construção da soma num espaço afim.

Seja $(E, \overset{o}{\underset{E}{+}})$ o grupo Abeliano da Proposição 4.4, a *diferença, relativa à origem o, entre os pontos a e b* em E é o elemento de E, denotado $a \overset{o}{\underset{E}{-}} b$ e dado por

$$a \overset{o}{\underset{E}{-}} b = a \overset{o}{\underset{E}{+}} (\overset{o}{\underset{E}{-}} b).$$

Daqui em diante, o conjunto E será o próprio retângulo $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. Quando a origem o é o par $(0,0)$, a adição $\overset{o}{\underset{E}{+}}$ reduz–se a adição módulo (n_1, n_2).

A Figura 4.3 mostra a soma $a \overset{o}{\underset{\mathbf{Ret}(9,10)}{+}} b$, relativa ao ponto origem o (representado por um pequeno quadrado preto), de dois pontos a e b de $\mathbf{Ret}(9,10)$ e o oposto $\overset{o}{\underset{\mathbf{Ret}(9,10)}{-}} a$, relativo à o, do ponto a. A soma e o oposto podem ser obtidos gráficamente duplicando 8 vezes o retângulo $\mathbf{Ret}(9,10)$ em torno dele mesmo e considerando a soma e o oposto, relativo a o, sobre o espaço afim canónico $\mathbf{Z}^2$, provido do mapeamento definido por $\vec{xy} = y - x$. A soma $a \overset{o}{\underset{\mathbf{Z}^2}{+}} b$ é obtida pela regra do paralelograma. Esta regra é baseada no seguinte resultado,

$$\begin{aligned} a \overset{o}{\underset{\mathbf{Z}^2}{+}} b &= o \underset{\mathbf{Z}^2}{+} (\vec{oa} + \vec{ob}) && \text{(definição de adição relativa à } o\text{)} \\ &= (o \underset{\mathbf{Z}^2}{+} \vec{oa}) \underset{\mathbf{Z}^2}{+} \vec{ob} && \text{(Proposição 4.2)} \\ &= a \underset{\mathbf{Z}^2}{+} \vec{ob}. && \text{(Definição 4.2)} \end{aligned}$$

A soma $a \underset{\mathbf{Ret}(9,10)}{\overset{o}{+}} b$ é obtida a partir da soma em $\mathbf{Z}^2$, levando à coincidência com $\mathbf{Ret}(9,10)$, o retângulo que contém esta soma. O oposto $\underset{\mathbf{Ret}(9,10)}{\overset{o}{-}} a$ é obtido a partir do oposto em $\mathbf{Z}^2$, levando à coincidência com $\mathbf{Ret}(9,10)$, o retângulo que contém este oposto.

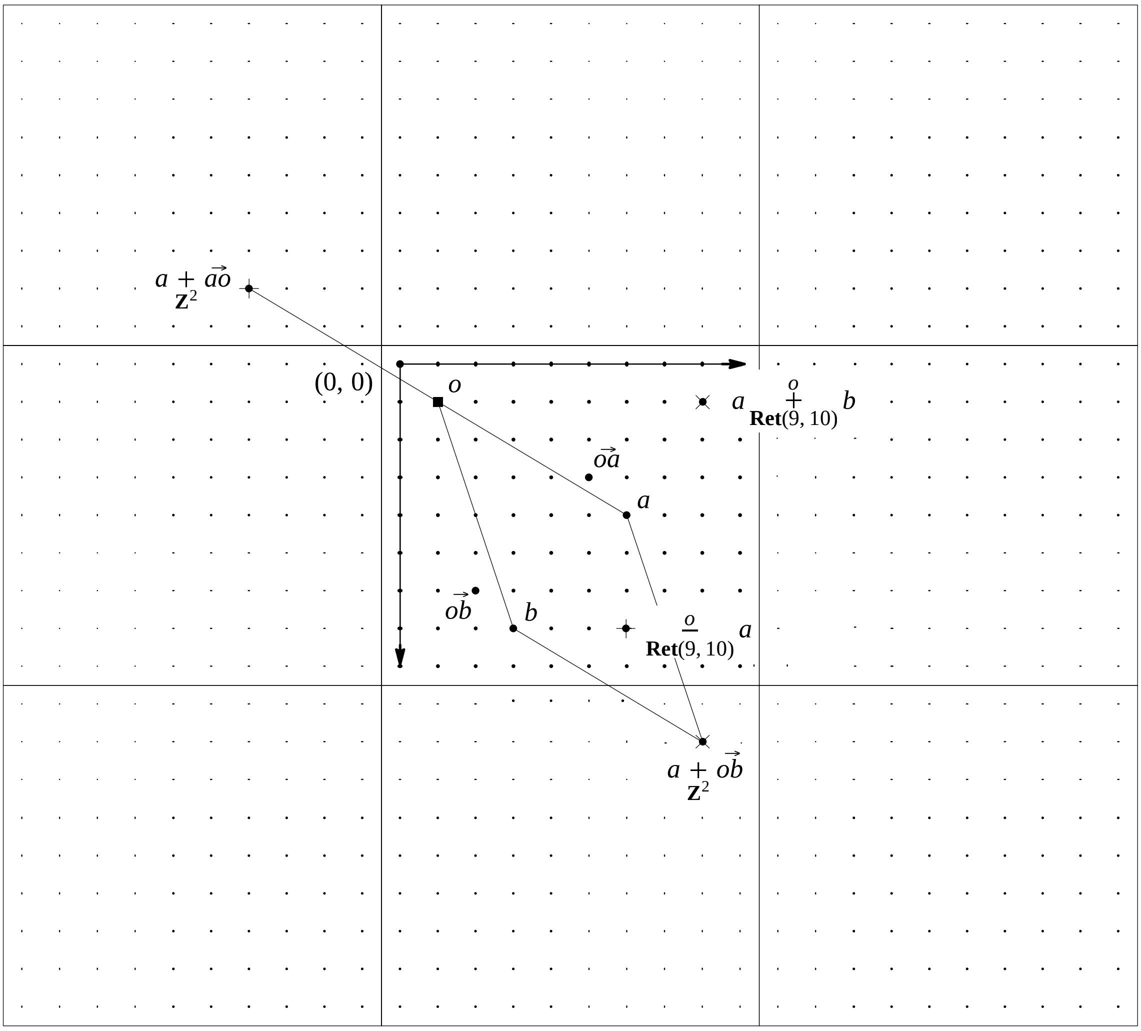


Fig. 4.3 – Soma e oposto num espaço afim.

Uma vez o conjunto E estruturado segundo um grupo Abeliano, podemos definir o operador de translação por um elemento de E, que chamaremos de vetor (apesar dele não ser um elemento de um espaço vetorial), e o operador de transposição.

Definição 4.4 (translação por um vetor) – Seja X um subconjunto de um grupo Abeliano E. O *translado de X por um vetor u de E* é o subconjunto denotado $X + u$ e dado por

$$X + u = \{x \in E : x - u \in X\}.$$

A *translação pelo vetor u* de E, denotada τ_u, é o operador sobre $\mathcal{P}(E)$ dado por

$$X \mapsto \tau_u(X) = X + u. \qquad \square$$

Exercício 4.4 (translado de um singleton) – Seja E um grupo Abeliano. Mostre que, para todo u e y em E,

$$\{y + u\} = \{y\} + u. \qquad \square$$

Prova – Para todo u e y em E,

$$\begin{aligned}
\{y\} + u &= \{x \in E : \; x - u \in \{y\}\} && \text{(definição de translado)}\\
&= \{x \in E : \; x - u = y\} && \text{(definição de singleton)}\\
&= \{x \in E : \; x = y + u\} && \text{(propriedade de } +\text{)}\\
&= \{y + u\}. && \text{(definição de singleton)}
\end{aligned}$$

$\square$

A Figura 4.5 mostra em cinza mais escuro o translado do subconjunto X de **Ret**$(9, 10)$ da Figura 4.4 pelo vetor $u = (4, 3)$ de **Ret**$(9, 10)$. Na Figura 4.5, a origem o é o ponto (0, 0).

X

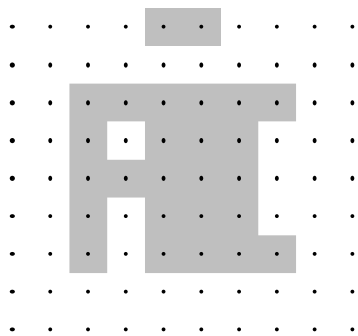


Fig. 4.4 – Um subconjunto.

Denotamos por $X - u$ o translado de X por $-u$.

A Figura 4.6 ilustra, através de um bloquinho, a translação pelo vetor $u = (4, 3)$ e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

Em Morfologia Matemática, uma classe muito estudada de operadores é a classe dos operadores invariantes por translação.

Definição 4.5 (invariança por translação) – Seja E um grupo Abeliano. Um operador ψ sobre $\mathcal{P}(E)$ é *invariante por translação* (*i.t.*) se e somente se, para todo $u \in E$,

$$\psi\tau_u = \tau_u\psi. \qquad (\textit{invariança por translação})$$

Em outros termos, para todo $X \in \mathcal{P}(E)$ e $u \in E$,

$$\psi(X + u) = \psi(X) + u. \qquad \square$$

A complementação é um exemplo de operador i.t., para todo $X \in \mathcal{P}(E)$ e $u \in E$,

$$(X + u)^c = X^c + u.$$

Proposição 4.5 (propriedades dos operadores invariantes por translação) – Seja E um grupo Abeliano. Os operadores sobre $\mathcal{P}(E)$, invariantes por translação, formam um sub–reticulado completo de $(\mathcal{P}(E)^{\mathcal{P}(E)}, \leq)$ e são fechados relativamente a composição. $\square$

Prova – Ver [HeiRon90, Proposição 3.1]. $\square$

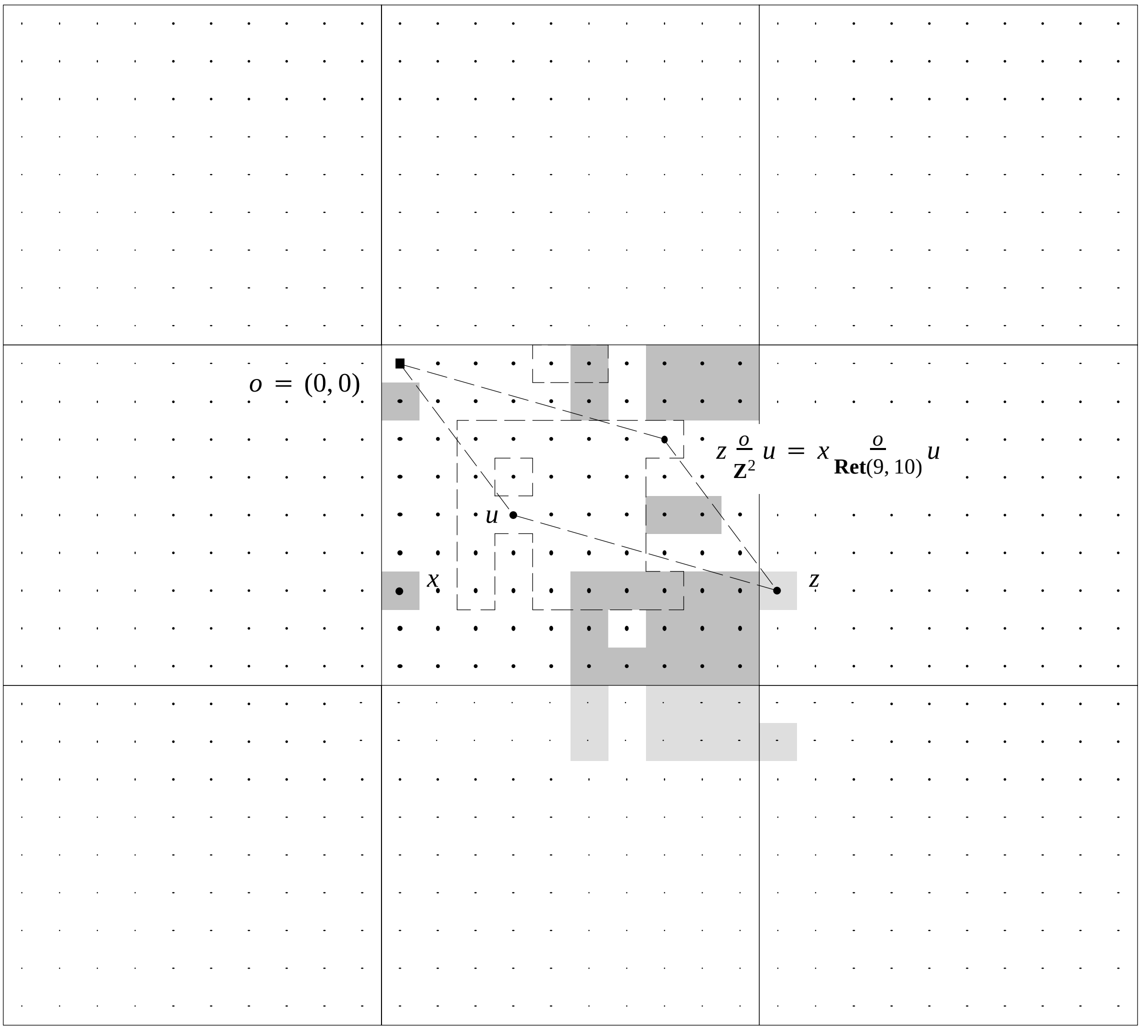


Fig. 4.5 – Translado de um subconjunto por um vetor.

Proposição 4.6 (propriedades do translado) – Seja E um grupo Abeliano com elemento neutro o. Para todo X, X_1 e X_2 em $\mathcal{P}(E)$, e para todo u e v em E,

(1) $X + o = X$

(2) $(X + u) + v = X + (u + v)$

(3) $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow (X_1 + u) \subset (X_2 + u)$. □

Exercício 4.5 (propriedades do translado) – Prove a Propriedade (2) ou (3) do translado. □

Como consequência da Proposição 4.6, temos, para toda família de elementos X_i em $\mathcal{P}(E)$ e todo u em E,

$$(\bigcup_{i \in I} X_i) + u = \bigcup_{i \in I} (X_i + u)$$

$$(\bigcap_{i \in I} X_i) + u = \bigcap_{i \in I} (X_i + u).$$

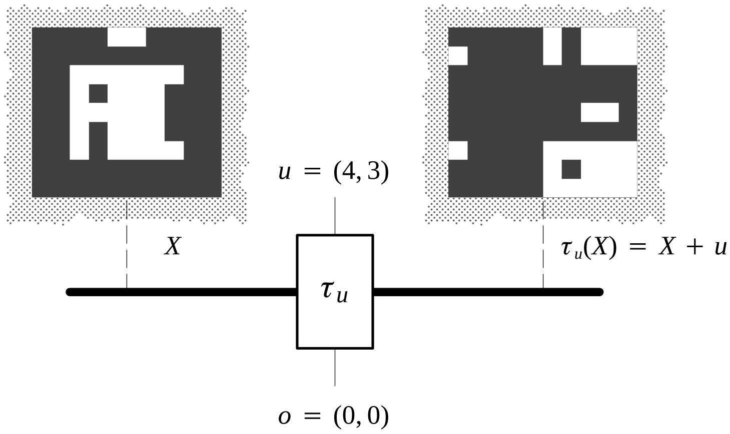


Fig. 4.6 – Um operador de translação.

A partir das propriedades do translado podemos enunciar as das translações.

Proposição 4.7 (propriedades das translações) – Seja E um grupo Abeliano com elemento neutro o. O conjunto das translações, provido da composição, forma um grupo Abeliano de automorfismos invariantes por translação, isto é, para todo vetor u, u_1, u_2 e u_3 em E e todo X_1 e X_2 em $\mathcal{P}(E)$,

(1) $\tau_{u_1}\tau_{u_2} = \tau_{u_2}\tau_{u_1}$ (comutatividade)

(2) $(\tau_{u_1}\tau_{u_2})\tau_{u_3} = \tau_{u_1}(\tau_{u_1}\tau_{u_3})$ (associatividade)

(3) $\exists \nu \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}},\ \tau_u\nu = \nu\tau_u = \tau_u$ (lei do elemento neutro)

(4) $\exists \tau' \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}},\ \tau_u\tau' = \tau'\tau_u = \nu$ (lei do oposto)

(5) $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow \tau_u(X_1) \subset \tau_u(X_2)$ (isotonia dupla)

(6) $\tau_u\tau_{-u} = \iota$. (bijeção)

O composto $\tau_{u_1}\tau_{u_2}$ é a translação $\tau_{u_1+u_2}$, o elemento neutro τ é a translação τ_o (τ_o é o operador identidade ι) e o oposto de τ_u é a translação τ_{-u}. □

Exercício 4.6 (propriedades das translações) – Prove duas das propriedades do enunciado da Proposição 4.7. Use, quando for o caso, a Proposição 4.6. □

A comutatividade das translações corresponde exatamente à propriedade de invariança por translação. A isotonia dupla e a bijeção fazem da translação τ_u um *automorfismo* sobre $\mathcal{P}(E)$. Por ser um automorfismo, τ_u é uma dilatação e uma erosão, para todo u em E e $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\tau_u(\sup\mathcal{X}) = \sup\tau_u(\mathcal{X}) \quad \text{e} \quad \tau_u(\inf\mathcal{X}) = \inf\tau_u(\mathcal{X}).$$

Quando E é provido de uma adição, é importante estudar, além da translação, um outro operador chamado de transposição.

Definição 4.6 (transposição) – Seja X um subconjunto de um grupo Abeliano E. O *transposto* (*em relação a origem*) *de* X é o subconjunto denotado X^t e dado por

$$X^t = \{x \in E : -x \in X\}.$$

A *transposição*, denotada τ, é o operador sobre $\mathcal{P}(E)$ dado por

$$X \mapsto \tau(X) = X^t.$$ □

A Figura 4.7 mostra em cinza mais escuro o transposto do subconjunto X da Figura 4.4. Na Figura 4.7, a origem o é o ponto (0, 0).

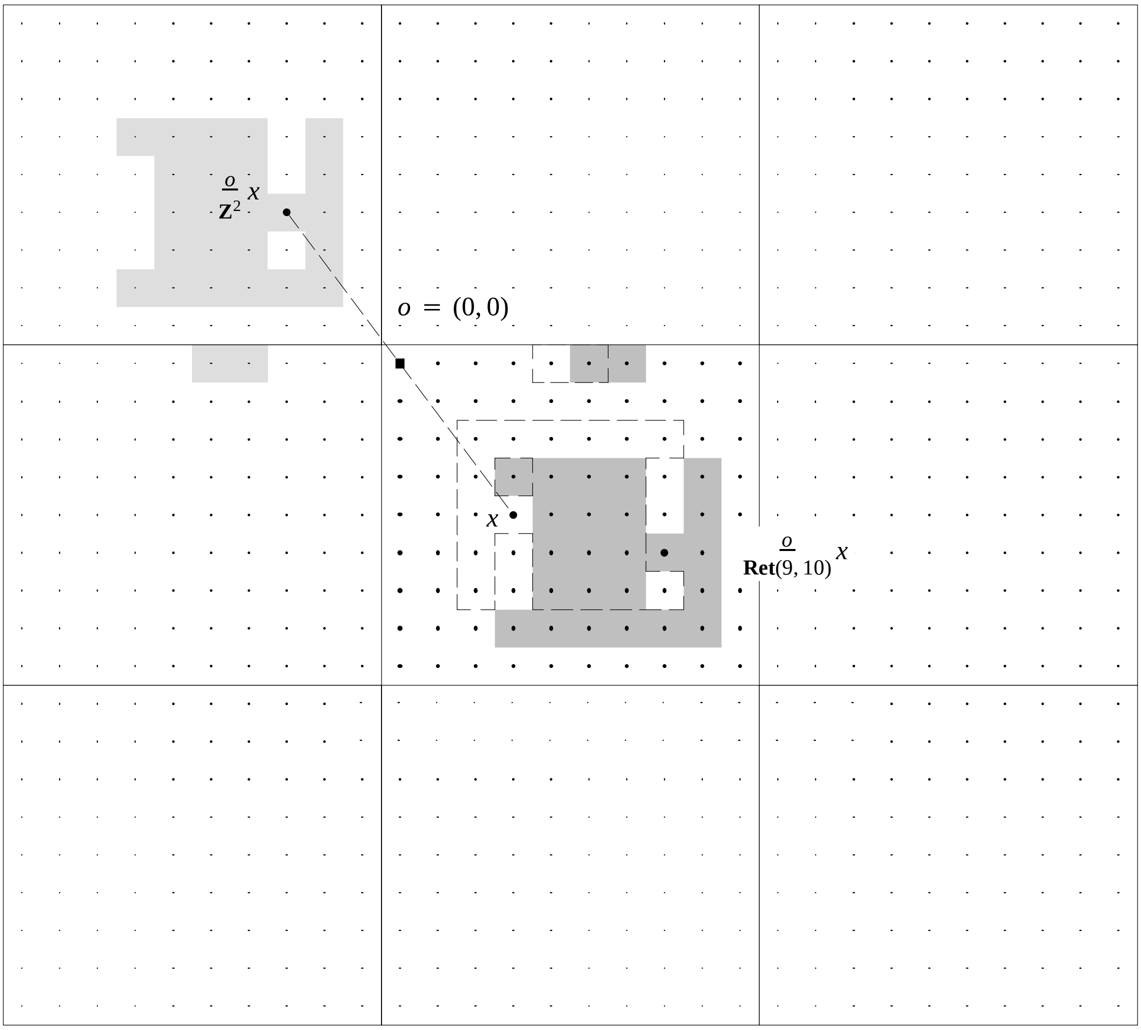


Fig. 4.7 – Transposto de um subconjunto.

A Figura 4.8 ilustra, através de um bloquinho, a transposição e o resultado obtido em termos de imagens binárias.

Um subconjunto X de E é *simétrico* (*em relação a origem*) se e somente se $X = X^{\mathrm{t}}$.

Considerando E como um grupo Abeliano sobre um espaço afim ligado ao retângulo $\mathbf{Ret}(5,5)$, a Figura 4.9 mostra, em (a), um subconjunto B_1 simétrico (em relação a origem $o = (2,2)$) e, em (b), um subconjunto B_2 não simétrico (em relação a origem $o = (0,0)$).

Proposição 4.8 (propriedades do transposto) – Seja E um grupo Abeliano. Para todo X, X_1 e X_2 em $\mathcal{P}(E)$,

(1) $(X^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = X$

(2) $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow {X_1}^{\mathrm{t}} \subset {X_2}^{\mathrm{t}}$. □

Exercício 4.7 (propriedades do transposto) – Prove a Propriedade (1) ou (2) do transposto. □

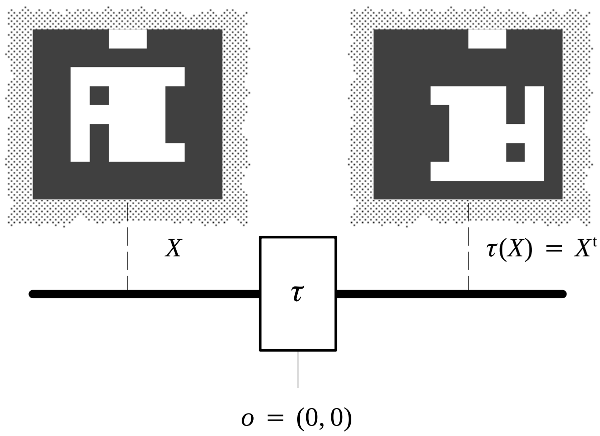


Fig. 4.8 – Transposição.

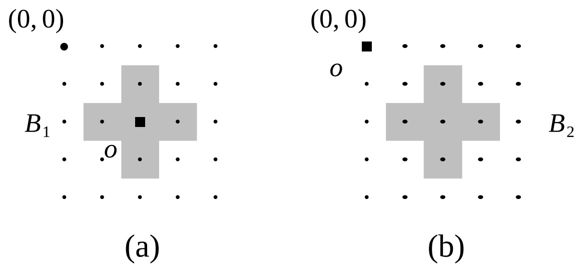


Fig. 4.9 – Simetria de um subconjunto (em relação a origem).

Como consequência da Proposição 4.8, temos, para toda família de elementos X_i em $\mathcal{P}(E)$,

$$(\bigcup_{i \in I} X_i)^t = \bigcup_{i \in I} X_i{}^t \quad \text{and} \quad (\bigcap_{i \in I} X_i)^t = \bigcap_{i \in I} X_i{}^t.$$

A partir das propriedades do transposto podemos enunciar as da transposição.

Proposição 4.9 (propriedades da transposição) – Seja E um grupo Abeliano. As transposições sobre $\mathcal{P}(E)$ formam um conjunto de automorfismos idempotentes de tipo 2, isto é, para todo X_1 e X_2 em $\mathcal{P}(E)$,

(1) $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow \tau(X_1) \subset \tau(X_2)$ (isotonia dupla)

(2) $\tau\tau = \iota$. (bijeção idempotente de tipo 2)

□

Exercício 4.8 (propriedades da transposição) – Prove uma das propriedades do enunciado da Proposição 4.9. Use, quando for o caso, a Proposição 4.8. □

A isotonia dupla e a bijeção fazem da transposição τ um *automorfismo* sobre $\mathcal{P}(E)$. Por ser um automorfismo, τ é uma dilatação e uma erosão, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\tau(\sup \mathcal{X}) = \sup \tau(\mathcal{X}) \quad \text{e} \quad \tau(\inf \mathcal{X}) = \inf \tau(\mathcal{X}).$$

A transposição *não* é um operador invariante por translação como mostra a proposição seguinte.

Proposição 4.10 (propriedades mútuas do translado e do transposto) – Seja E um grupo Abeliano. Para todo X em $\mathcal{P}(E)$ e u e v em E,

(1) $(X + u)^{\mathrm{t}} = X^{\mathrm{t}} - u$

(2) $u \in X + v \Leftrightarrow v \in X^{\mathrm{t}} + u$. □

Prova – Vamos provar a Propriedade (1). Para todo $u \in E$, $X \in \mathcal{P}$ e $y \in E$,

$$
\begin{aligned}
y \in (X + u)^{\mathrm{t}} &\Leftrightarrow -y \in X + u && \text{(definição do transposto)}\\
&\Leftrightarrow (-y) - u \in X && \text{(definição do translado)}\\
&\Leftrightarrow -(y + u) \in X && \text{(soma e oposto comutam)}\\
&\Leftrightarrow y + u \in X^{\mathrm{t}} && \text{(definição do transposto)}\\
&\Leftrightarrow y \in X^{\mathrm{t}} - u && \text{(definição do translado)}
\end{aligned}
$$

isto é, para todo $u \in E$, $X \in \mathcal{P}$,

$$(X + u)^{\mathrm{t}} = X^{\mathrm{t}} - u.$$

Vamos provar a Propriedade (2). Para todo u e $v \in E$ e $X \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
u \in X + v &\Leftrightarrow u - v \in X && \text{(definição do translado)}\\
&\Leftrightarrow -(v - u) \in X && \text{(soma e oposto comutam)}\\
&\Leftrightarrow v - u \in X^{\mathrm{t}} && \text{(definição do transposto)}\\
&\Leftrightarrow v \in X^{\mathrm{t}} + u. && \text{(definição do translado)}
\end{aligned}
$$

□

A Figura 4.10 ilustra a Propriedade (2), enunciada na Proposição 4.10. Nesta figura, a origem o é o ponto (0, 0). Em (a), a área cinza representa um subconjunto X particular; em (b), a área cinza representa o transposto X^{t}; em (c), os dois pontos pretos representam dois pontos u e v de E e a área cinza o translado $X + v$; em (d) a área cinza representa $X^{\mathrm{t}} + u$, o translado por u do transposto de X. Observa–se quem, em (c), u pertence a $X + v$ e, em (d), v pertence a $X^{\mathrm{t}} + u$.

A partir das propriedades mútuas do translado e do transposto podemos enunciar as das translações e da transposição.

Proposição 4.11 (propriedades mútuas da translação e da transposição) – Para todo u e $v \in E$ e $X \in \mathcal{P}$,

(1) $\tau\tau_u = \tau_{-u}\tau$

(2) $u \in \tau_v(X) \Leftrightarrow v \in \tau_u\tau(X)$. □

Prova – Vamos provar a Propriedade (1). Para todo $u \in E$, $X \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
\tau\tau_u(X) &= \tau(\tau_u(X)) && \text{(definição da composição)}\\
&= \tau(X + u)) && \text{(definição da translação)}\\
&= (X + u)^{\mathrm{t}} && \text{(definição da transposição)}\\
&= X^{\mathrm{t}} - u && \text{(Proposição 4.10)}\\
&= \tau_{-u}(X^{\mathrm{t}}) && \text{(definição da translação)}\\
&= \tau_{-u}(\tau(X)) && \text{(definição da transposição)}\\
&= \tau_{-u}\tau(X). && \text{(definição da composição)}
\end{aligned}
$$

Vamos provar a Propriedade (2). Para todo u e $v \in E$ e $X \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
u \in \tau_v(X) &\Leftrightarrow u \in X + v && \text{(definição da translação)}\\
&\Leftrightarrow v \in X^{\mathrm{t}} + u && \text{(Proposição 4.10)}\\
&\Leftrightarrow v \in \tau_u(X^{\mathrm{t}}) && \text{(definição da translação)}\\
&\Leftrightarrow v \in \tau_u(\tau(X)) && \text{(definição da transposição)}\\
&\Leftrightarrow v \in \tau_u\tau(X). && \text{(definição da composição)}
\end{aligned}
$$

□

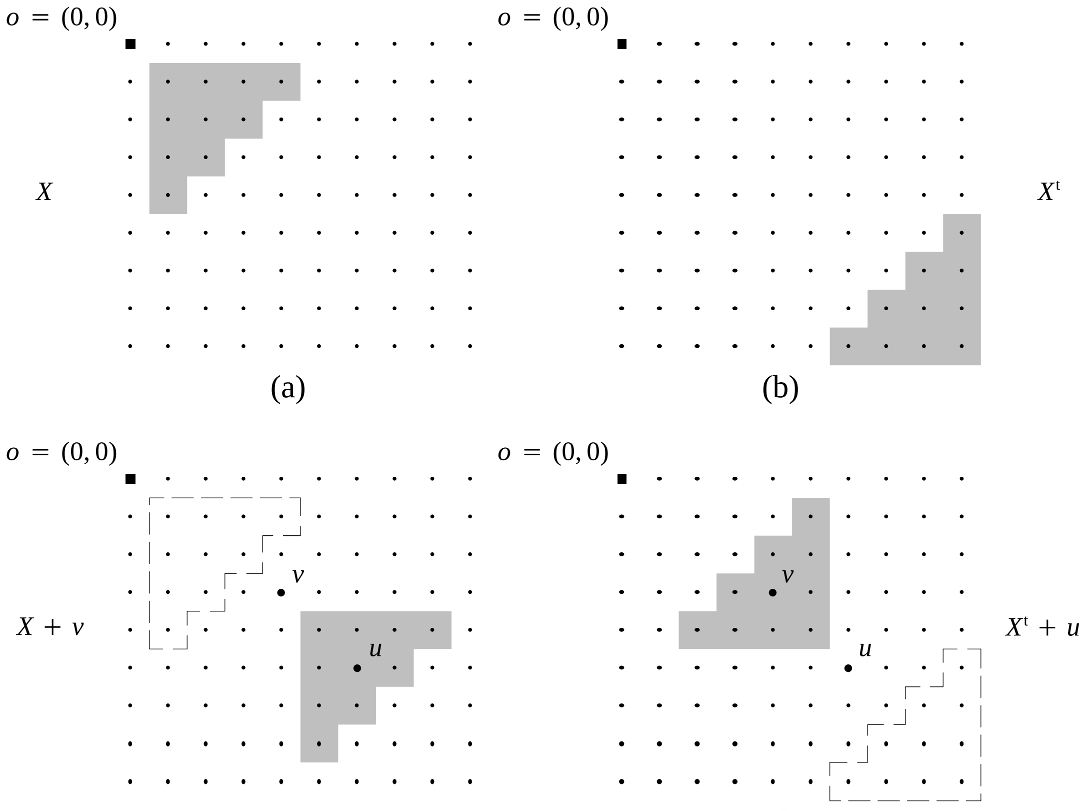


Fig. 4.10 – Relação entre o translado e o transposto.

4.2 Adição e subtração de Minkowski

Na seção anterior, foram vistas a adição entre dois pontos de E e a adição entre um subconjunto e um ponto (a translação). Nesta seção, vamos definir a adição entre dois subconjuntos, conhecida como a adição de Minkowski [Minkow03].

Definição 4.7 (adição de Minkowski) – Seja E um grupo Abeliano. Sejam A e B dois subconjuntos de E. A *soma de Minkowski de A e B* é o subconjunto de E, denotado $A \oplus B$ e dado por

$$A \oplus B = \{x \in E : \exists a \in A \text{ e } \exists b \in B,\ x = a + b\}.$$

A *adição de Minkowski*, denotada $\oplus$, é o mapeamento dado por

$(A, B) \mapsto A \oplus B.$ □

A Figura 4.11 ilustra a construção da soma de Minkowski de dois subconjuntos A e B.

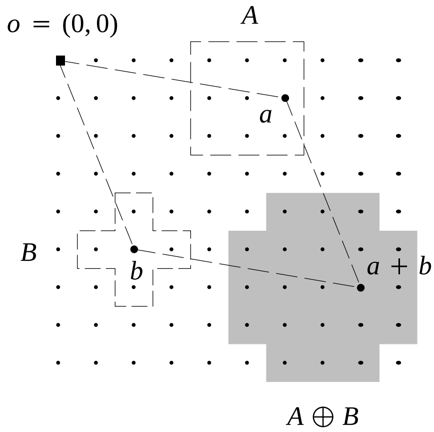


Fig. 4.11 – Soma de Minkowski de dois subconjuntos.

A Figura 4.12 mostra três exemplos de soma de Minkowski. Observamos que a soma de um subconjunto por um singleton contendo a origem é o próprio subconjunto. Os resultados destas três somas ilustram uma solução do problema de interpolação de formas. Entre a cruz e o quadrado de tamanho 5×5, resultantes da primeira e terceira somas, temos uma forma intermediária, resultante da soma de uma cruz e de um quadrado de tamanho 3×3.

Seja B um subconjunto de E e n um número inteiro não negativo. Às vezes, é útil denotarmos por nB o subconjunto de E dado pela composição de $n - 1$ adições de Minskowski, isto é,

$$nB = (...(B \oplus B) \oplus B...) \oplus B$$

se n for maior que 1, o próprio conjunto B, se n for 1, e o singleton $\{o\}$, se n for 0.

Proposição 4.12 (propriedades da soma de Minkowski) – Para todo A, B, e C em $\mathcal{P}$ e u em E,

(1) $A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A + b$ (definição equivalente)

(2) $A \oplus B = B \oplus A$ (comutatividade)

(3) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (associatividade)

(4) $A \oplus \{o\} = A$ (lei do elemento neutro)

(5) $(A \oplus B) + u = (A + u) \oplus B$ (translação versus soma de Minkowski)

(6) $o \in B \Rightarrow A \subset A \oplus B.$ □

Prova – Propriedade (1). Para todo A e B em $\mathcal{P}$ e para todo $x \in E$,

$x \in A \oplus B \Leftrightarrow \exists a \in A$ e $\exists b \in B,\ x = a + b$ (definição de $\oplus$)

$\Leftrightarrow \exists b \in B,\ (\exists a \in A,\ x = a + b)$ (equivalência lógica)

$\Leftrightarrow \exists b \in B,\ (\exists a \in A,\ a = x - b)$ (propriedade de $+$)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists b \in B,\ x - b \in A && \text{(equivalência lógica)}\\
&\Leftrightarrow \exists b \in B,\ x \in A + b && \text{(definição de translado)}\\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{b \in B} A + b. && \text{(definição de união)}
\end{aligned}$$

Propriedade (2). Ela decorre da comutatividade da soma em E.

Propriedade (3). Ela decorre da associatividade da soma em E.

Propriedade (4). Para todo A em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
A \oplus \{o\} &= \bigcup_{b \in \{o\}} A + b && \text{(Propriedade (1))}\\
&= A + o && \text{(família reduzida a um membro)}\\
&= A. && \text{(propriedade do translado)}
\end{aligned}$$

Propriedade (5). Para todo A e B em $\mathcal{P}$ e u em E,

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) + u &= (\bigcup_{b \in B} A + b) + u && \text{(Propriedade (1))}\\
&= \bigcup_{b \in B} (A + b) + u && \text{(propriedade do translado)}\\
&= \bigcup_{b \in B} A + (b + u) && \text{(propriedade do translado)}\\
&= \bigcup_{b \in B} A + (u + b) && \text{(comutatividade da adição)}\\
&= \bigcup_{b \in B} (A + u) + b && \text{(propriedade do translado)}\\
&= (A + u) \oplus B. && \text{(Propriedade (1))}
\end{aligned}$$

Propriedade (6). Para todo A e B em $\mathcal{P}$ e para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned}
(x \in A \quad \text{e} \quad o \in B) &\Rightarrow x + o \in A \oplus B && \text{(definição de } \oplus\text{)}\\
&\Leftrightarrow x \in A \oplus B. && \text{(propriedade de } +\text{)}
\end{aligned}$$

Isto é, para todo A e B em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
o \in B &\Rightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow x \in A \oplus B)\\
&\Leftrightarrow A \subset A \oplus B. && \text{(definição de inclusão)}
\end{aligned}$$

$\square$

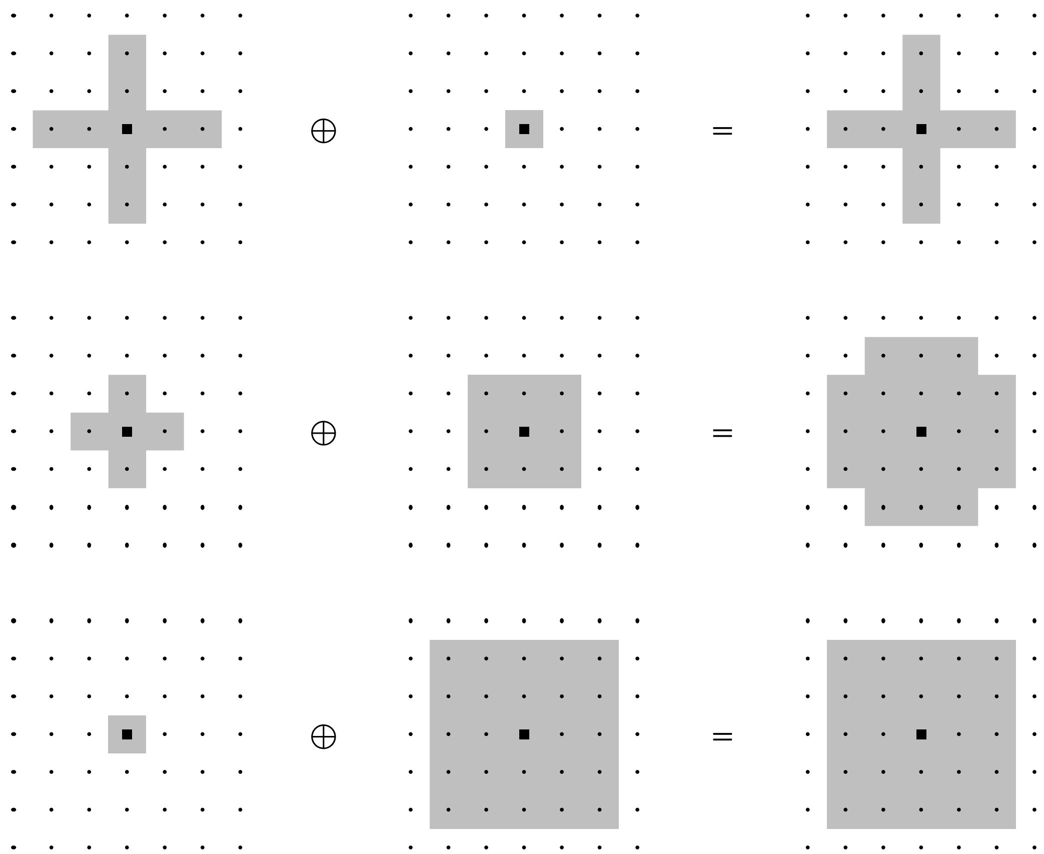


Fig. 4.12 – Três exemplos de soma de Minkowski.

Exercício 4.9 (propriedades da soma de Minkowski) – Prove uma das propriedades abaixo. Para todo A, A_1, A_2, B, B_1 e B_2 em $\mathcal{P}$,

(1) $A \oplus B = \{x \in E : (B^t + x) \cap A \neq \emptyset\}$ (definição equivalente)

(2) $(A_1 \cup A_2) \oplus B = (A_1 \oplus B) \cup (A_2 \oplus B)$ (distributividade de $\oplus$)

(3) $A \oplus (B_1 \cup B_2) = (A \oplus B_1) \cup (A \oplus B_2)$ (distributividade de $\oplus$)

(4) $(A_1 \cap A_2) \oplus B \subset (A_1 \oplus B) \cap (A_2 \oplus B)$

(5) $A \oplus (B_1 \cap B_2) \subset (A \oplus B_1) \cap (A \oplus B_2)$

(6) $A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow A_1 \oplus B \subset A_2 \oplus B$

(7) $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow A \oplus B_1 \subset A \oplus B_2$

(8) $\emptyset \oplus B = \emptyset$

(9) $E \oplus B = \begin{cases} E & \text{se } B \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{c.c..} \end{cases}$ □

Após várias décadas, Hadwiger [Hadwig50, Hadwig57] definiu a subtração de Minkowski que tem um papel tão importante quanto a soma de Minkovski em morfologia de subconjunto.

Definição 4.8 (subtração de Minkowski) – Seja E um grupo Abeliano. Sejam A e B dois subconjuntos de E. A *diferença de Minkowski entre A e B* é o subconjunto de E, denotado $A \ominus B$ e dado por

$$A \ominus B = \{y \in E : \forall b \in B, (\exists a \in A, y = a - b)\}.$$

A *subtração de Minkowski*, denotada $\ominus$, é o mapeamento dado por

$$(A, B) \mapsto A \ominus B. \quad \Box$$

A Figura 4.13 ilustra a construção da diferença de Minkowski entre dois subconjuntos A e B.

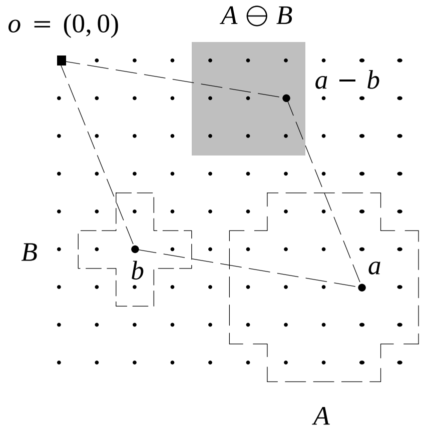


Fig. 4.13 – Diferença de Minkowski entre dois subconjuntos.

Proposição 4.13 (propriedades da diferença de Minkowski) – Para todo A, B, e C em $\mathcal{P}$ e u em E,

(1) $A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A - b$ (definição equivalente)

(2) $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$

(3) $A \ominus \{o\} = A$

(4) $(A \ominus B) + u = (A + u) \ominus B$ (translação versus a diferença de Minkowski)

(5) $o \in B \Rightarrow A \ominus B \subset A$. $\Box$

Prova – Propriedade (1). Para todo A e B em $\mathcal{P}$ e para todo $y \in E$,

$$\begin{aligned} y \in A \ominus B &\Leftrightarrow \forall b \in B, (\exists a \in A, y = a - b) && \text{(definição de } \ominus\text{)} \\ &\Leftrightarrow \forall b \in B, (\exists a \in A, a = y + b) && \text{(propriedade da } +\text{)} \\ &\Leftrightarrow \forall b \in B, y + b \in A && \text{(equivalência lógica)} \\ &\Leftrightarrow \forall b \in B, y \in A - b && \text{(definição de translado)} \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{b \in B} A - b. && \text{(definição de interseção)} \end{aligned}$$

Propriedade (2). Para todo A, B, e C em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} (A \ominus B) \ominus C &= \bigcap_{c \in C} (\bigcap_{b \in B} A - b) - c && \text{(Propriedade (1))} \\ &= \bigcap_{c \in C} \bigcap_{b \in B} (A - b) - c && \text{(propriedade do translado)} \end{aligned}$$

$$= \bigcap_{c \in C} \bigcap_{b \in B} A - (b + c) \qquad \text{(propriedade do translado)}$$

$$= \bigcap_{b \in B \text{ e } c \in C} A - (b + c) \qquad \text{(associatividade da interseção)}$$

$$= \bigcap_{x \in B \oplus C} A - x \qquad \text{(definição de soma de Minkowski)}$$

$$= A \ominus (B \oplus C). \qquad \text{(Propriedade (1))}$$

Propriedade (3). Para todo A em $\mathcal{P}$,

$$A \ominus \{o\} = \bigcap_{b \in \{o\}} A - b \qquad \text{(Propriedade (1))}$$

$$= A - o \qquad \text{(família reduzida a um membro)}$$

$$= A. \qquad \text{(propriedade do translado)}$$

Propriedade (4). Para todo A e B em $\mathcal{P}$ e u em E,

$$(A \ominus B) + u = (\bigcap_{b \in B} A - b) + u \qquad \text{(Propriedade (1))}$$

$$= \bigcap_{b \in B} (A - b) + u \qquad \text{(propriedade do translado)}$$

$$= \bigcap_{b \in B} A + ((-b) + u) \qquad \text{(propriedade do translado)}$$

$$= \bigcap_{b \in B} A + (u - b) \qquad \text{(comutatividade da adição)}$$

$$= \bigcap_{b \in B} (A + u) - b \qquad \text{(propriedade do translado)}$$

$$= (\bigcap_{b \in B} A + u) - b \qquad \text{(propriedade do translado)}$$

$$= (A + u) \ominus B. \qquad \text{(Propriedade (1))}$$

Propriedade (5). Para todo A e B em $\mathcal{P}$ e para todo $y \in E$,

$$(y \in A \ominus B \text{ e } o \in B) \Rightarrow (\exists a \in A, y = a - o) \qquad \text{(definição de } \ominus)$$

$$\Leftrightarrow (\exists a \in A, y = a) \qquad \text{(propriedade da } +)$$

$$\Leftrightarrow y \in A \qquad \text{(equivalência lógica)}$$

Isto é, para todo A e B em $\mathcal{P}$,

$$o \in B \Rightarrow (\forall y \in E, y \in A \ominus B \Rightarrow y \in A)$$

$$\Leftrightarrow A \ominus B \subset A. \qquad \text{(definição de inclusão)}$$

□

Exercício 4.10 (propriedades da diferença de Minkowski) – Prove uma das propriedades abaixo. Para todo A, A_1, A_2, B, B_1 e B_2 em $\mathcal{P}$,

(1) $A \ominus B = \{y \in E : (B + y) \subset A\}$ (definição equivalente)

(2) $(A_1 \ominus B) \cup (A_2 \ominus B) \subset (A_1 \cup A_2) \ominus B$

(3) $A \ominus (B_1 \cup B_2) = (A \ominus B_1) \cap (A \ominus B_2)$

(4) $(A_1 \cap A_2) \ominus B = (A_1 \ominus B) \cap (A_2 \ominus B)$ (distributividade de $\ominus$)

(5) $(A \ominus B_1) \cup (A \ominus B_2) \subset A \ominus (B_1 \cap B_2)$

(6) $A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow A_1 \ominus B \subset A_2 \ominus B$

(7) $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow A \ominus B_2 \subset A \ominus B_1$

(8) $E \ominus B = E$

(9) $\emptyset \ominus B = \begin{cases} \emptyset & \text{se } B \neq \emptyset \\ E & \text{c.c..} \end{cases}$ □

4.3 Dilatações e erosões invariantes por translação

O conjunto da dilatações (resp. erosões) invariantes por translação, como interseção do reticulado completo das dilatações (resp. erosões) e o reticulado completo dos operadores invariantes por translação é também um reticulado completo.

Para caracterizar os operadores elementares invariantes por translação é interessante definir a noção de função invariante por translação.

Definição 4.9 (função invariante por translação) – Seja E um grupo Abeliano. Uma função b de E em $\mathcal{P}(E)$ é *invariante por translação* (*i.t.*), se e somente se, as propriedades equivalentes abaixo são verificadas.

(1) $\forall u \text{ e } y \in E,\ b(y + u) = b(y) + u$

(2) $\exists B \in \mathcal{P}(E),\ \forall y \in E,\ b(y) = B + y.$ □

Exercício 4.11 (função invariante por translação) – Mostre a equivalência entre as Propriedades (1) e (2) da Definição 4.9.

□

Usando a adição de Minkowski, podemos agora caracterizar as dilatações invariantes por translação.

Proposição 4.14 (propriedades das dilatações invariantes por translação) – Seja E um grupo Abeliano. Seja δ uma dilatação sobre $\mathcal{P}(E)$ e seja b sua função estruturante, então as três propriedades abaixo são equivalentes.

(1) b é invariante por translação

(2) $\delta(Y) = Y \oplus B\ \ (Y \in \mathcal{P}(E))$ e $B = \delta(\{o\})$

(3) δ é invariante por translação. □

Prova – Vamos provar que (1) implica (2). Para todo $Y \in \mathcal{P}$ e para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \delta(Y) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{y \in Y} b(y) && \text{(caracterização das dilatações)} \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{y \in Y} (B + y) && \text{(definição de função i.t. e Hipótese (1))} \\ &\Leftrightarrow x \in B \oplus Y. && \text{(definição de } \oplus\text{)} \end{aligned}$$

Isto é, pela comutatividade de $\oplus$, para todo $Y \in \mathcal{P}$,

$$\delta(Y) = Y \oplus B.$$

Em consequência,

$$\begin{aligned} \delta(\{o\}) &= \{o\} \oplus B && (Y = \{o\}) \\ &= B. && \text{(propriedade de } \oplus\text{)} \end{aligned}$$

Vamos provar que (2) implica (3). Para todo $x \in E$ e para todo $Y \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \delta(Y + u) &= (Y + u) \oplus B && \text{(Hipótese (2))} \\ &= (Y \oplus B) + u && \text{(propriedade de } \oplus\text{)} \\ &= \delta(Y) + u. && \text{(Hipótese (2))} \end{aligned}$$

Isto é, δ é invariante por translação.

Vamos provar que (3) implica (1). Para todo $y \in E$,

$$\begin{aligned} b(y + u) &= \delta(\{y + u\}) && \text{(definição de função estruturante de } \delta\text{)} \\ &= \delta(\{y\} + u) && \text{(Exercício 4.4)} \\ &= \delta(\{y\}) + u. && \text{(Hipótese (3))} \\ &= b(y) + u. && \text{(definição de função estruturante de } \delta\text{)} \end{aligned}$$

Isto é, b é invariante por translação. □

A partir da Proposição 4.14, podemos caracterizar as dilatações invariantes por translação.

Proposição 4.15 (caracterização das dilatações i.t.) – Seja Δ' o conjunto das dilatações i.t.. O mapeamento de Δ' em $\mathcal{P}(E)$,

$$\delta \mapsto B_\delta\,,$$

onde B_δ é o subconjunto dado por

$$B_\delta = \delta(\{o\})$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$B \mapsto \delta_B\,,$$

onde δ_B é a dilatação i.t dada por

$$\delta_B(Y) = Y \oplus B \quad (Y \in \mathcal{P}).$$ □

Prova – Antes de tudo, temos que verificar que δ_B é uma dilatação i.t.. Seja $B \in \mathcal{P}$, seja b um mapeamento de E em $\mathcal{P}$ tal que

$$b(y) = B + y \;\; (y \in E)$$

e seja δ_b a dilatação pela função estruturante b. Para todo Y e B em $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \delta_b(Y) &= Y \oplus B && \text{(Proposição 4.14, ((1) implica (2)))} \\ &= \delta_B(Y). \end{aligned}$$

Isto é, pela Proposição 3.5, δ_B é uma dilatação e pela Proposição 4.14, ((2) implica (3)) δ_B é i.t.

Vamos provar que $\delta \mapsto B_\delta$ é uma bijeção. Em primeiro lugar, para todo $\delta \in \Delta'$ e $Y \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \delta_{B_\delta}(Y) &= Y \oplus B_\delta && \text{(definição de } \delta_B) \\ &= Y \oplus \delta(\{o\}) && \text{(definição de } B_\delta) \\ &= \delta(Y), && \text{(Proposição 4.14, ((3) implica (2)))} \end{aligned}$$

em outros termos, para todo $\delta \in \Delta'$, $\delta_{B_\delta} = \delta$. Isto prova que o mapeamento $\delta \mapsto B_\delta$ é injetor.

Em segundo lugar, para todo $B \in \mathcal{P}$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in B_{\delta_B} &\Leftrightarrow x \in \delta_B(\{o\}) && \text{(definição de } B_\delta) \\ &\Leftrightarrow x \in \{o\} \oplus B && \text{(definição de } \delta_B) \\ &\Leftrightarrow x \in B. && \text{(propriedade de } \oplus) \end{aligned}$$

em outros termos, para todo $B \in \mathcal{P}$, $a_{\delta_B} = B$. Isto prova que o mapeamento $\delta \mapsto B_\delta$ é sobrejetor e conseqüentemente é uma bijeção. □

A Proposição 4.15 mostra que existe uma correspondência um por um entre Δ' e $\mathcal{P}$. Os subconjuntos de E caracterizam sem ambigüidade as dilatações i.t.. A figura 4.14 ilustra este resultado. O subconjunto B_δ é chamado de *elemento estruturante da dilatação i.t. δ*.

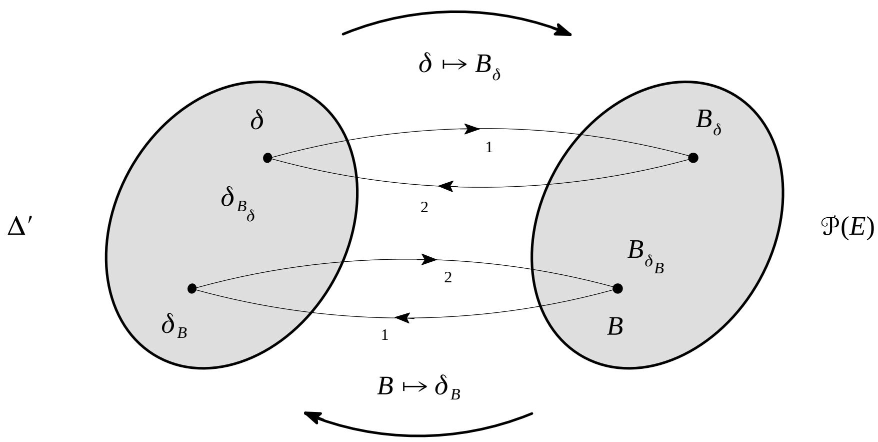


Fig. 4.14 – Bijeção entre as dilatações i.t. e os subconjuntos.

Para um dado subconjunto Y, o subconjunto $\delta_B(Y)$ chama–se de *dilatação de Y pelo elemento estruturante B*.

Podemos caracterizar de uma maneira análoga as erosões, anti–dilatações e anti–erosões por elementos estruturantes. Nestes casos, para um dado subconjunto X, os subconjuntos $\epsilon_B(X)$, $\delta^{a}{}_B(X)$ e $\epsilon^{a}{}_B(X)$ chamam–se, respectivamente, de *erosão, anti–dilatação* e *anti–erosão de X pelo elemento estruturante B* e são dados por,

$$\epsilon_B(X) = X \ominus B$$

$$\delta^{a}{}_B(X) = (X \oplus B^{c})^{c}$$

$$\epsilon^{a}{}_B(X) = (X \ominus B)^{c}.$$

A Figura 4.15 mostra um exemplo de dilatação de um subconjuto por um elemento estruturante. A Figura 4.16 mostra dois modos de construir o dilatado de um subconjunto. Em (a), usamos a definição equivalente de soma de Minkowski, dada na Proposição 4.12 (Propriedade (1)). Neste modo, o dilatado é obtido “pintando” com o quadradinho, cujo centro permanece dentro do conjunto a ser dilatado. Em (b), usamos a definição equivalente de soma de Minkowski dada no Exercício 4.9 (Propriedade(1)). Neste modo, o dilatado é o conjunto de todos os centros dos quadradinhos que *tocam* o conjunto a ser dilatado.

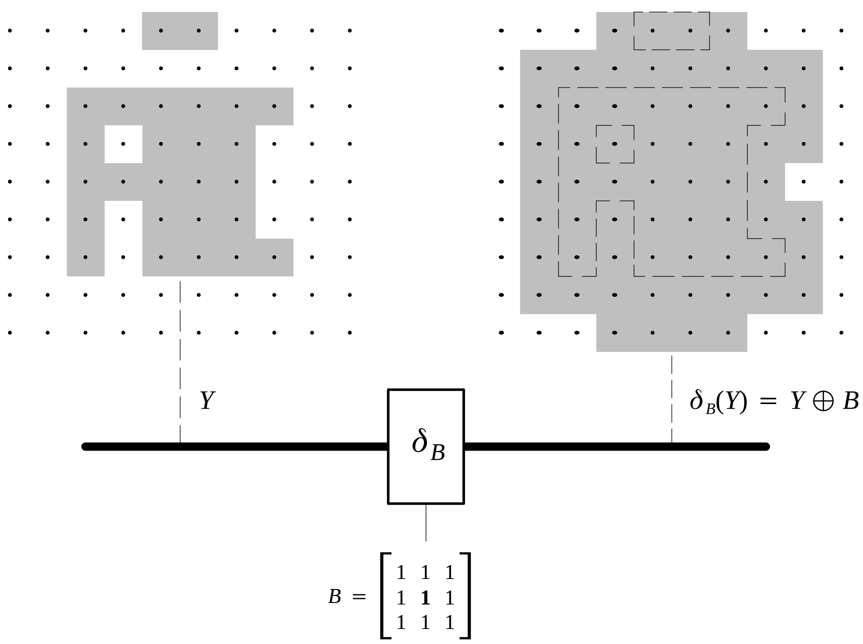
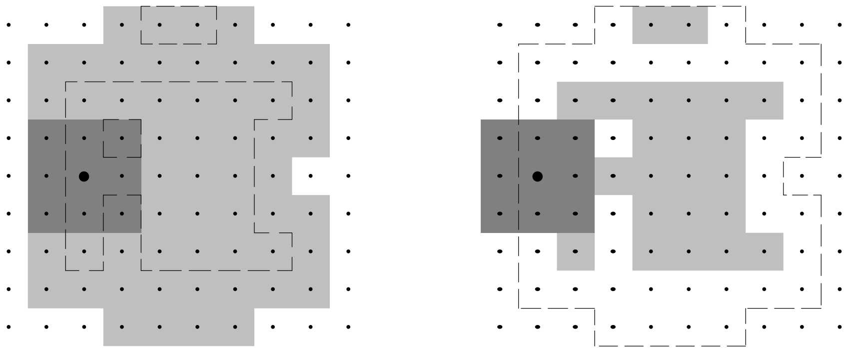


Fig. 4.15 – Dilatação de um subconjunto por um elemento estruturante.

A Figura 4.17 mostra um exemplo de erosão de um subconjuto por um elemento estruturante. A Figura 4.18 mostra o modo de construir o erodido de um subconjunto. Usamos a definição equivalente de diferença de Minkowski, dada no Exercício 4.10 (Propriedade(1)), onde o erodido é o conjunto de todos os centros dos quadradinhos que *estão contidos* no conjunto a ser erodido.

Vamos, agora, introduzir uma representação matricial para os elementos estruturantes. Seja B um subconjunto do retângulo $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. Usando a bijeção $B \mapsto 1_B$ do Capítulo 2 e escrevendo 1_B na forma matricial

$$\left[1_B(i-1, j-1)\right]_{n_1 \times n_2}$$



(a) (b)

Fig. 4.16 – Dois modos de construir o dilatado.

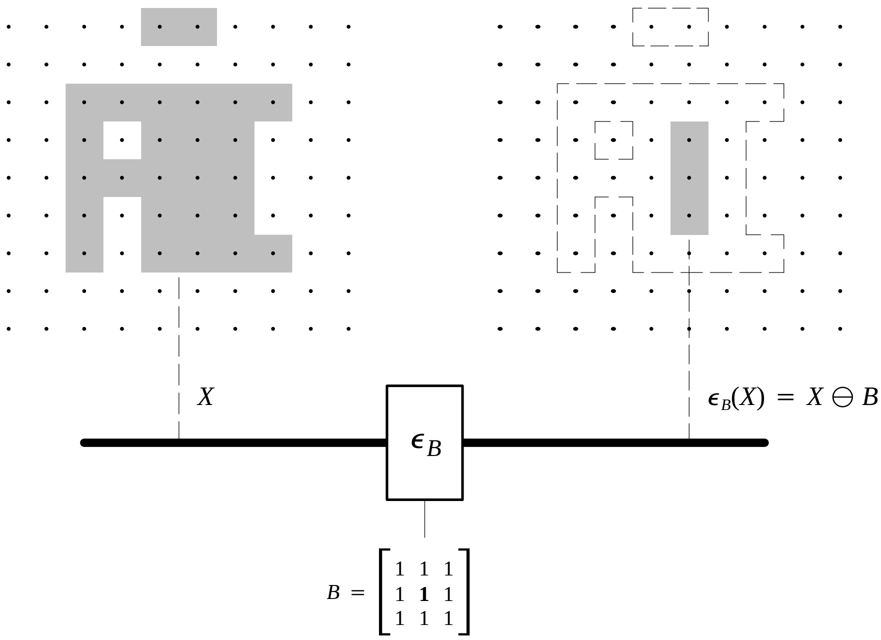


Fig. 4.17 – Erosão de um subconjunto por um elemento estruturante.

onde $1_B(i-1, j-1)$ representa o elemento da $i^{\text{ésima}}$ linha e $j^{\text{ésima}}$ coluna da matriz de dimensão $n_1 \times n_2$, temos uma representação para o conjunto B. Por abuso de linguagem, escrevemos então B na forma de uma matriz de zeros e uns

$$B = \left[b_{i,j}\right]_{n_1 \times n_2}.$$

Seja E um grupo Abeliano sobre um espaço afim ligado a $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$. Como pode ser observado na expressão da soma em E,

$$a \overset{o}{\underset{E}{+}} b = a \underset{\mathbf{Ret}(n_1, n_2)}{+} \vec{ob},$$

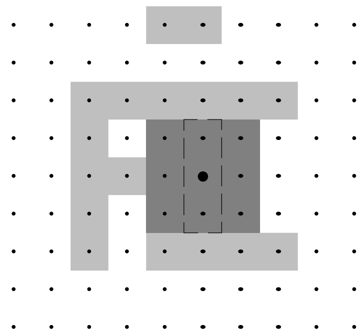


Fig. 4.18 – Modo de construir o erodido.

para computar esta soma, basta conhecer a posição relativa de apenas um dos dois pontos (aqui b) em relação à origem o. Em Morfologia Matemática, na hora de calcular a dilatação i.t. de um subconjunto X por um elemento estruturante B (i.e.$X \oplus B$) é habitual definir a posição relativa do elemento estruturante B (e não X) em relação à origem.

Neste caso, devemos acrescentar à representação de B a indicação do ponto o de $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ escolhido como origem (isto é, como elemento neutro do grupo). Escrevemos então B na forma de um par

$$B = (\left[b_{i,j}\right]_{n_1 \times n_2}, o).$$

Por exemplo, os subconjuntos B_1 e B_2 mostrados na Figura 4.9 poderão ser escritos então

$$B_1 = (\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, (2,2)) \quad \text{e} \quad B_2 = (\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, (0,0)).$$

Para simplificar a notação, adotamos a convenção de realçar o elemento posicionado na origem,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&\mathbf{1}&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Como os elementos estruturantes são geralmente subconjuntos com poucos pontos e que estes estão agrupados, para simplificar ainda mais a notação, representamos estes na forma da menor submatriz que contém todos os 1s e o elemento posicionado na origem. Desta forma, os subconjuntos B_1 e B_2 mostrados na Figura 4.9 poderão ser escritos

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0&1&0\\ 1&\mathbf{1}&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&1&1\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}.$$

Nesta última forma de representar um subconjunto, é entendido que os elementos não representados valem 0.

Seja $m_1 \times m_2$ a dimensão da menor submatriz usado na representação de B, então B é dito de *dimensão* $m_1 \times m_2$.

As dilatações e erosões por um elemento estruturante têm todas as propriedades das dilatações e erosões já vistas no capítulo anterior e mais aquelas que decorrem das propriedades da soma e diferença de Minkowski.

Proposição 4.16 (propriedades da dilatação por um elemento estruturante) – Seja B um subconjunto de um grupo Abeliano E. Seja δ_B a dilatação pelo elemento estruturante B, isto é,

$$\delta_B(Y) = Y \oplus B \quad (Y \in \mathcal{P}),$$

então valem as seguintes propriedades. Para todo B, B_1 e B_2 em $\mathcal{P}$,

(1) $\delta_B(Y) = \bigcup_{b \in B} (Y + b) \quad (Y \in \mathcal{P})$

(2) $\delta_B(Y) = \{x \in E : (B^t + x) \cap Y \neq \emptyset\} \quad (Y \in \mathcal{P})$

(3) $\delta_B(\sup \mathcal{Y}) = \sup \delta_B(\mathcal{Y}) \quad (\mathcal{Y} \subset \mathcal{P})$ (dilatação)

(4) $\tau_u \delta_B = \delta_B \tau_u \quad (u \in E)$ (invariança por translação)

(5) $\delta_{B_1} \delta_{B_2} = \delta_{B_1 \oplus B_2}$ (separabilidade)

(6) $\delta_{\{o\}} = \iota$ (identidade)

(7) $o \in B \Rightarrow \iota \leq \delta_B$ (extensividade)

(8) $\delta_{B_1} \vee \delta_{B_2} = \delta_{B_1 \cup B_2}$ (sup–fechamento)

(9) $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow \delta_{B_1} \leq \delta_{B_2}$ (isotonia dupla)

(10) $\delta_B(\emptyset) = \emptyset.$ (invariante)

□

Prova – As Propriedades (1) e (2) decorrem das definições equivalentes de adição de Minkowski.

As Propriedades (3) e (4) decorrem da Proposição 4.15.

As Propriedades (5), (6) e (7) decorrem da Proposição 4.12.

As Propriedades (8), (9) e (10) decorrem do Exercício 4.9. □

Pela comutatividade da adição de Minkowski e pelaa Propriedade (5), observamos que as dilatações i.t. são *comutativas* (o que não ocorre em geral com as dilatações não i.t.).

As Propriedades (5) e (8) são muito importantes na prática para programar dilatações por grandes elementos estruturantes a partir de dilatações com elementos estruturantes menores ou para melhorar o tempo de processamento (ver também Seção 8.2). Por exemplo, observando a seguinte decomposição do losângulo 5×5 por dois losângulos 3×3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

constatamos que o losângulo 5×5 tem 13 pontos enquanto os dois losângulos 3×3 somam juntos 10 pontos. Em termos de eficiência computacional é então preferível programar duas dilatações pelo losângulo 3×3 do que uma só dilatação pelo losângulo 5×5. Podemos até melhorar este resultado, observando a seguinte decomposição

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

constatamos que os dois elementos estruturantes 3×3 somam juntos 9 pontos. A Figura 4.19 mostra o diagrama de blocos equivalente a uma dilatação pelo losângulo 5×5.

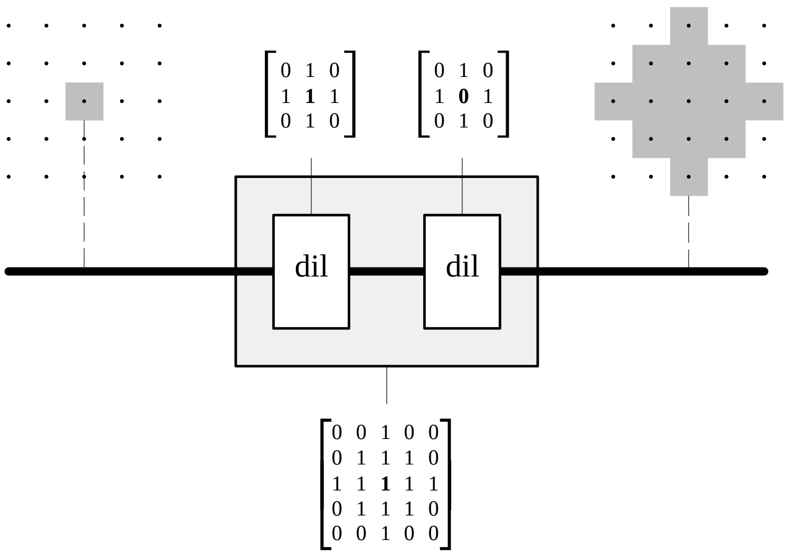


Fig. 4.19 – Diagrama de blocos de uma dilatação pelo losângulo 5 por 5.

Exercício 4.12 (programação de uma dilatação por decomposição de elemento estruturante) – Seguindo a Propriedade (5), encontre o diagrama de blocos de uma dilatação pelo elemento estruturante B dado abaixo, usando apenas dilatações por elementos estruturantes 3×3 com seus centros posicionados na origem.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Procure uma solução computacionalmente eficiente. □

Exercício 4.13 (programação de uma dilatação por decomposição de elemento estruturante) – Seguindo as Propriedades (5) e (8), encontre o diagrama de blocos de uma dilatação pelo elemento estruturante B dado abaixo, usando apenas dilatações por elementos estruturantes 3×3 com seus centros posicionados na origem.

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Procure uma solução computacionalmente eficiente. □

Proposição 4.17 (propriedades da erosão por um elemento estruturante) – Seja B um subconjunto de um grupo Abeliano E. Seja ϵ_B a erosão pelo elemento estruturante B, isto é,

$$\epsilon_B(X) = X \ominus B \quad (X \in \mathcal{P}),$$

então valem as seguintes propriedades. Para todo B, B_1 e B_2 em $\mathcal{P}$,

(1) $\epsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X - b \quad (X \in \mathcal{P})$

(2) $\epsilon_B(X) = \{y \in E : (B + y) \subset X\} \quad (X \in \mathcal{P})$

(3) $\epsilon_B(\inf \mathcal{X}) = \inf \epsilon_B(\mathcal{X}) \quad (\mathcal{X} \subset \mathcal{P})$ (erosão)

(4) $\tau_u \epsilon_B = \epsilon_B \tau_u \quad (u \in E)$ (invariança por translação)

(5) $\epsilon_{B_1} \epsilon_{B_2} = \epsilon_{B_1 \oplus B_2}$ (separabilidade)

(6) $\epsilon_{\{o\}} = \iota$ (identidade)

(7) $o \in B \Rightarrow \epsilon_B \leq \iota$ (anti–extensividade)

(8) $\epsilon_{B_1} \wedge \epsilon_{B_2} = \epsilon_{B_1 \cup B_2}$ (inf–fechamento)

(9) $B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow \epsilon_{B_2} \leq \epsilon_{B_1}$ (antitonia)

(10) $\epsilon_B(E) = E$. (invariante)

□

Exercício 4.14 (propriedades da erosão por um elemento estruturante) – Prove a Proposição 4.17. □

Pela comutatividade da adição de Minkowski e a Propriedade (5) observamos que as erosões i.t. são *comutativas* (o que *não* ocorre em geral com as erosões não i.t.).

4.4 Dilatações e erosões condicionalmente invariantes por translação

Em certas aplicações, os operadores elementares invariantes por translação podem apresentar efeitos de bordas indesejáveis, porque num ponto x de "borda" de E o elemento estruturante transladado $B + x$ geralmente cobre simultaneamente as imediações da "borda" considerada e da "borda oposta". Na prática, usa–se, então, operadores elementares que têm um comportamento similar aos operadores i.t. no "centro" de E e que nunca tem o efeito de "juntar" as "bordas opostas".

Seja $\mathbf{Z}^2$ o conjunto de pares ordenados de inteiros e seja E um retângulo de $\mathbf{Z}^2$. Vamos considerar as translações pelos vetores do grupo Abeliano $(\mathbf{Z}^2, +)$.

Definição 4.10 (função condicionalmente invariante por translação) – Uma função b de E em $\mathcal{P}(E)$ é *condicionalmente invariante por translação* (*c.i.t.*) se e somente se

$$\exists B \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^2),\ \forall y \in E,\ b(y) = (B + y) \cap E. \qquad \square$$

A partir da definição de função c.i.t. definimos as dilatações e as erosões condicionalmente invariantes por translação.

Definição 4.11 (dilatação e erosão condicionalmente invariantes por translação) – Uma *dilatação* (resp. *erosão*) *condicionalmente invariante por translação* (*c.i.t.*)é uma dilatação δ_b (resp. erosão ϵ_b) por uma função estruturante b condicionalmente invariantes por translação. □

A dilatação δ_b (resp. erosão ϵ_b) da definição acima é a dilatação (resp. erosão) definida no enunciado da Proposição 3.5 (resp. 5.6).

Cada função c.i.t. pode ser caracterizado por um subconjunto B de $E \oplus E^t$ [BanBar94]. Para todo $B \in \mathcal{P}(E \oplus E^t)$, denotamos por b_B a função c.i.t. definida por

$$b_B(y) = (B + y) \cap E \quad (y \in E).$$

Denotamos então por δ_B (resp. ϵ_B) a dilatação (resp. erosão) c.i.t. por b_B e chamamos B de *elemento estruturante da dilatação* (resp. *erosão*) *c.i.t.*.

As Figuras 4.20 e 4.21 mostram a diferença de comportamento nas “bordas” de uma dilatação i.t. e de uma dilatação c.i.t. construídas a partir do mesmo elemento estruturante (o losângulo 3×3).

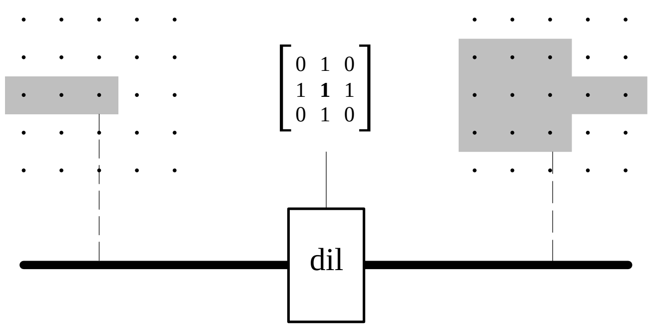


Fig. 4.20 – Dilatação invariante por translação.

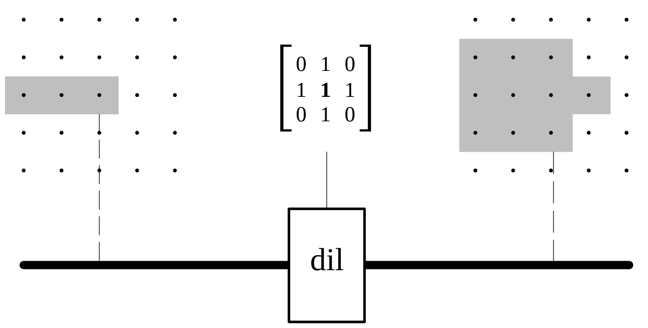


Fig. 4.21 – Dilatação condicionalmente invariante por translação.