Capítulo 3

Operadores sobre subconjuntos

No capítulo anterior foram definidas vários mapeamentos, chamados de operações, envolvendo subconjuntos ou funções binárias. Neste capítulo, vamos introduzir outros mapeamentos que chamaremos de *operadores*. Estes mapeamentos generalizam as operações unárias no sentido que, relativamente a um dado ponto x de E, o resultado da transformação de um subconjunto ou de uma função binária vai depender geralmente do subconjunto ou da função binária como um todo. Isto é próprio de toda transformação que é construída a partir de uma noção de vizinhança.

A Morfologia Matemática estuda a decomposição de operadores entre reticulados completos em termos de quatro classes de operadores: as dilatações, as erosões, as anti–dilatações e as anti–erosões. Estes operadores, chamados de elementares ou primitivos, têm um papel fundamental porque a partir deles pode ser construído qualquer outro operador [BanBar91, BanBar93].

Modernamente os operadores elementares da Morfologia Matemática são apresentados de forma axiomática e a partir dessa definição são deduzidas as respectivas formas construtivas, chamadas caracterização dos operadores elementares, que permitem as implementações em computadores. Seguindo essa tendência, neste capítulo, introduzimos os operadores elementares de forma axiomática e apresentamos a caracterização das dilatações. No Capítulo 5, deduziremos a caracterização das erosões a partir da caracterização das dilatações.

Na última parte deste capítulo, apresentamos formas de construção de um operador a partir de outros e estudamos propriedades que são preservadas nestas construções.

3.1 Operadores

Daqui para frente, usaremos a representação das imagens binárias por subconjuntos, isto é, a representação tradicional, em Morfologia Matemática, para as imagens binárias. Denotaremos simplesmente por $\mathcal{P}$ a colação $\mathcal{P}(E)$, quando não houver dúvida sobre o conjunto E.

Definição 3.1 (operador) – Um *operador* sobre $\mathcal{P}$ é um mapeamento de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P}$. □

Com esta definição, a complementação, definida no capítulo anterior, além de ser uma operação é um operador (degenerado).

O conjunto de todos os operadores sobre $\mathcal{P}$ será denotado $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$. Um operador sobre $\mathcal{P}$ é denotado genericamente pela letra grega ψ. Temos então $\psi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$.

Um operador sobre $\mathcal{P}$ transforma um subconjuto X em $\mathcal{P}$ em um subconjunto Y em $\mathcal{P}$. A Figura 3.1 mostra a representação de um operador, através um bloquinho com uma entrada e uma saida.

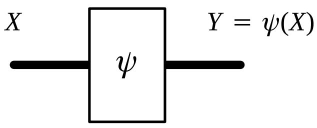

Fig. 3.1 – Um operador.

Nesta seção, vamos apresentar algumas propriedades importantes que se aplicam aos operadores.

Definição 3.2 (extensividade e anti–extensividade) – Um operador ψ sobre $\mathcal{P}$ é

extensivo se e somente se, para todo A em $\mathcal{P}$,

$$A \subset \psi(A), \qquad (\textit{extensividade})$$

anti–extensivo se e somente se, para todo A em $\mathcal{P}$,

$$\psi(A) \subset A. \qquad (\textit{anti–extensividade})$$

□

Definição 3.3 (idempotências) – Um operador ψ sobre $\mathcal{P}$ é

idempotente de tipo 1 ou simplesmente *idempotente* se e somente se, para todo A em $\mathcal{P}$,

$$\psi(\psi(A)) = \psi(A), \qquad (\textit{idempotência de tipo 1} \text{ ou simplesmente } \textit{idempotência})$$

idempotente de tipo 2 se e somente se, para todo A em $\mathcal{P}$,

$$\psi(\psi(A)) = A. \qquad (\textit{idempotência de tipo 2})$$

□

O operador “limpeza” $A \mapsto \emptyset$ é um exemplo de operador idempotente de tipo 1.

A complementação $A \mapsto A^{c}$ definida no capítulo anterior é um exemplo de operador idempotente de tipo 2, para todo A em $\mathcal{P}$, temos

$$(A^{c})^{c} = A.$$

Definição 3.4 (isotonia e antitonia) – Um operador ψ sobre $\mathcal{P}$ é

isotônico (ou *crescente*) se e somente se, para todo A e B em $\mathcal{P}$,

$$A \subset B \Rightarrow \psi(A) \subset \psi(B). \qquad (\textit{isotonia})$$

antitônico (ou *decrescente*) se e somente se, para todo A e B em $\mathcal{P}$,

$$A \subset B \Rightarrow \psi(B) \subset \psi(A). \qquad (\textit{antitonia})$$

□

A complementação é um exemplo de operador antitônico, para todo A e B em $\mathcal{P}$, temos

$$A \subset B \;\Rightarrow\; B^c \subset A^c.$$

A complementação é uma *involução*, isto é, ela é idempotente de tipo 2 e antitônica.

Vamos definir de maneira equivalentes as propriedades de isotonia e antitonia.

Seja $\mathcal{X}$ uma subcoleção de $\mathcal{P}$. Denotaremos por $\psi(\mathcal{X})$ a imagem de $\mathcal{X}$ através de ψ, isto é,

$$\psi(\mathcal{X}) = \{Y \in \mathcal{P} : \; \exists X \in \mathcal{X}, \; Y = \psi(X)\}.$$

Proposição 3.1 (definições equivalentes de um operador isotônico) – Seja $\psi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$. As três proposições seguintes são equivalentes:

(1) ψ é isotônico;

(2) para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, $\sup\psi(\mathcal{X}) \subset \psi(\sup\mathcal{X})$;

(3) para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, $\psi(\inf\mathcal{X}) \subset \inf\psi(\mathcal{X})$. □

Prova ([HeiRon90, Lemma 2.1, p. 260]) – Vamos provar que (1) implica (2).

$$\begin{aligned}
\psi \text{ é isotônico} \;&\Rightarrow\; \forall\mathcal{X} \subset \mathcal{P},\; \forall X \in \mathcal{X},\; \psi(X) \subset \psi(\sup\mathcal{X}) && \text{(definição de isotonia e } X \subset \sup\mathcal{X})\\
&\Leftrightarrow\; \forall\mathcal{X} \subset \mathcal{P},\; \psi(\sup\mathcal{X}) \text{ l.s. de } \psi(\mathcal{X}) && \text{(definições de l.s. e } \psi(\mathcal{X}))\\
&\Leftrightarrow\; \forall\mathcal{X} \subset \mathcal{P},\; \sup\psi(\mathcal{X}) \subset \psi(\sup\mathcal{X}). && \text{(definição de supremo)}
\end{aligned}$$

Vamos provar que (2) implica (1).

$$\begin{aligned}
&\forall\mathcal{X} \subset \mathcal{P},\; \sup\psi(\mathcal{X}) \subset \psi(\sup\mathcal{X})\\
&\quad\Rightarrow\; \forall A, B \in \mathcal{P},\; \psi(A) \cup \psi(B) \subset \psi(A \cup B) && \text{(propriedade de } \cup)\\
&\quad\Rightarrow\; \forall A, B \in \mathcal{P},\; (B = A \cup B \Rightarrow \psi(A) \cup \psi(B) \subset \psi(A \cup B)) && \text{(implicação lógica)}\\
&\quad\Leftrightarrow\; \forall A, B \in \mathcal{P},\; (B = A \cup B \Rightarrow \psi(A) \cup \psi(B) \subset \psi(B)) && \text{(equivalência lógica)}\\
&\quad\Leftrightarrow\; \forall A, B \in \mathcal{P},\; (B = A \cup B \Rightarrow \psi(A) \subset \psi(B)) && \text{(propriedade de } \cup \text{ e transitividade de } \subset)\\
&\quad\Leftrightarrow\; \forall A, B \in \mathcal{P},\; (A \subset B \Rightarrow \psi(A) \subset \psi(B)) && \text{(consistência de } \cup \text{ e } \subset)\\
&\quad\Leftrightarrow\; \psi \text{ é isotônico.} && \text{(definição de isotonia)}
\end{aligned}$$

De uma maneira similar, prova–se que (1) e (3) são equivalentes. □

Proposição 3.2 (definições equivalentes de um operador antitônico) – Seja $\psi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$. As três proposições seguintes são equivalentes:

(1) ψ é antitônico;

(2) para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, $\psi(\sup\mathcal{X}) \subset \inf\psi(\mathcal{X})$;

(3) para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, $\sup\psi(\mathcal{X}) \subset \psi(\inf\mathcal{X})$. □

Prova – A prova é similar a da Proposição 3.1. □

3.2 Dilatações, erosões, anti–dilatações e anti–erosões

Em seguinda vamos dar a definição de quatro classes (ou subconjuntos) fundamentais de operadores. Os operadores destas classes serão chamados de *operadores elementares* da Morfologia Matemática. Usamos esta terminologia porque a decomposição de qualquer operador pode ser feita em termos destes operadores [BanBar93].

Definição 3.5 (dilatação, erosão, anti–dilatação e anti–erosão) – Um operador ψ sobre $\mathcal{P}$ é

uma *dilatação* se e somente se, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\psi(\sup \mathcal{X}) = \sup \psi(\mathcal{X}),$$

uma *erosão* se e somente se, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\psi(\inf \mathcal{X}) = \inf \psi(\mathcal{X}),$$

uma *anti–dilatação* se e somente se, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\psi(\sup \mathcal{X}) = \inf \psi(\mathcal{X}),$$

uma *anti–erosão* se e somente se, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\psi(\inf \mathcal{X}) = \sup \psi(\mathcal{X}).$$ □

O conjunto das dilatações é denotado Δ, o das erosões E, o das anti–dilações Δ^{a} e o das anti–erosões E^{a}. Uma dilatação é denotada genericamente por δ, uma erosão por ε, uma anti–dilatação por δ^{a} e uma anti–erosão por ϵ^{a}. Para um dado subconjunto X, os subconjuntos $\delta(X)$, $\epsilon(X)$, $\delta^{a}(X)$ e $\epsilon^{a}(X)$ chamam–se, respectivamente, de *dilatação*, *erosão*, *anti–dilatação* e *anti–erosão de X*.

Pela Definição 3.5, fazendo $\mathcal{X} = \emptyset$ e lembrando que $\sup\emptyset = \emptyset$ e $\inf\emptyset = E$, temos, para toda dilatação δ, erosão ε, anti–dilatação δ^{a} e anti–erosão ϵ^{a}, as igualdades úteis abaixo

$$\delta(\emptyset) = \emptyset,$$

$$\epsilon(E) = E,$$

$$\delta^{a}(\emptyset) = E,$$

$$\epsilon^{a}(E) = \emptyset.$$

Proposição 3.3 (isotonia das dilatações e erosões) – As dilatações e as erosões são isotônicas. □

Prova – As dilatações e as erosões verificam, respectivamente, as proposições (2) e (3) da Proposição 3.1, o que prova que elas são isotônicas. □

Proposição 3.4 (antitonia das anti–dilatações e anti–erosões) – As anti–dilatações e as anti–erosões são antitônicas. □

Prova – As anti–dilatações e as anti–erosões verificam, respectivamente, as proposições (2) e (3) da Proposição 3.2, o que prova que elas são antitônicas. □

Pelas propriedades das operações de união e interseção estendidas às famílias de subconjuntos, podemos definir de uma maneira equivalente as dilatações e erosões. Um operador sobre $\mathcal{P}$ é uma dilatação se e somente se ele comuta com a união, e uma erosão se e somente se ele comuta com a interseção, isto é, $\delta \in \Delta$ e $\epsilon \in \mathrm{E}$ se e somente se, para toda família $(X_i)_{i \in I}$ em $\mathcal{P}$,

$$\bigcup_{i \in I} \delta(X_i) = \delta(\bigcup_{i \in I} X_i) \quad \text{e} \quad \epsilon(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} \epsilon(X_i).$$

Pelas Proposições 3.1 e 3.3, para toda dilatação δ e erosão ε, e para toda família $(X_i)_{i \in I}$ em $\mathcal{P}$,

$$\delta(\bigcap_{i \in I} X_i) \subset \bigcap_{i \in I} \delta(X_i) \quad \text{e} \quad \bigcup_{i \in I} \epsilon(X_i) \subset \epsilon(\bigcup_{i \in I} X_i).$$

As quatro classes de operadores elementares sobre $\mathcal{P}(E)$ podem ser caracterizadas pelas funções de E em $\mathcal{P}(E)$. Vamos, por enquanto, caracterizar apenas a classe das dilatações [Serra88, Proposition 2.1, p. 41]. Denotaremos o conjunto das funções de E em $\mathcal{P}(E)$ por $\mathcal{P}^E$.

Proposição 3.5 (caracterização das dilatações) – O mapeamento de Δ em $\mathcal{P}^E$,

$$\delta \mapsto a_\delta\,,$$

onde a_δ é a função dada por

$$a_\delta(y) = \delta(\{y\}) \quad (y \in E)$$

é uma bijeção. Seu inverso é

$$a \mapsto \delta_a\,,$$

onde δ_a é a dilatação dada por

$$\delta_a(Y) = \bigcup_{y \in Y} a(y) \quad (Y \in \mathcal{P}). \qquad \square$$

Prova – Antes de tudo, temos que verificar que δ_a é uma dilatação. Para todo $a \in \mathcal{P}^E$ e $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
\delta_a(\sup\mathcal{Y}) &= \bigcup_{y \in \sup\mathcal{Y}} a(y) && \text{(definição de } \delta_a\text{)}\\
&= \bigcup_{y \in \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y} a(y) && \text{(propriedade da união)}\\
&= \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} \bigcup_{y \in Y} a(y) && \text{(associatividade e idempotência da união)}\\
&= \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} \delta_a(Y) && \text{(definição de } \delta_a\text{)}\\
&= \sup\delta_a(\mathcal{Y}). && \text{(propriedade da união)}
\end{aligned}$$

Vamos provar que $\delta \mapsto a_\delta$ é uma bijeção. Em primeiro lugar, para todo $\delta \in \Delta$ e $Y \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
\delta_{a_\delta}(Y) &= \bigcup_{y \in Y} a_\delta(y) && \text{(definição de } \delta_a\text{)} \\
&= \bigcup_{y \in Y} \delta(\{y\}) && \text{(definição de } a_\delta\text{)} \\
&= \delta(\bigcup_{y \in Y} \{y\}) && \text{(propriedade de dilatação)} \\
&= \delta(Y), && \text{(representação de } Y \text{ por uma união de singletons)}
\end{aligned}
$$

em outros termos, para todo $\delta \in \Delta$, $\delta_{a_\delta} = \delta$. Isto prova que o mapeamento $\delta \mapsto a_\delta$ é injetor.

Em segundo lugar, para todo $a \in \mathcal{P}^E$ e $y \in E$,

$$
\begin{aligned}
a_{\delta_a}(y) &= \delta_a(\{y\}) && \text{(definição de } a_\delta\text{)} \\
&= \bigcup_{v \in \{y\}} a(v) && \text{(definição de } \delta_a\text{)} \\
&= a(y), && \text{(definição de singleton)}
\end{aligned}
$$

em outros termos, para todo $a \in \mathcal{P}^E$, $a_{\delta_a} = a$. Isto prova que o mapeamento $\delta \mapsto a_\delta$ é sobrejetor e consequentemente é uma bijeção. □

A Proposição 3.5 mostra que existe uma correspondência um por um entre Δ e $\mathcal{P}^E$. As funções a com valores nas partes de E caracterizam sem ambigüidade as dilatações. A Figura 3.2 ilustra este resultado. A função a_δ é chamada de *função estruturante da dilatação* δ.

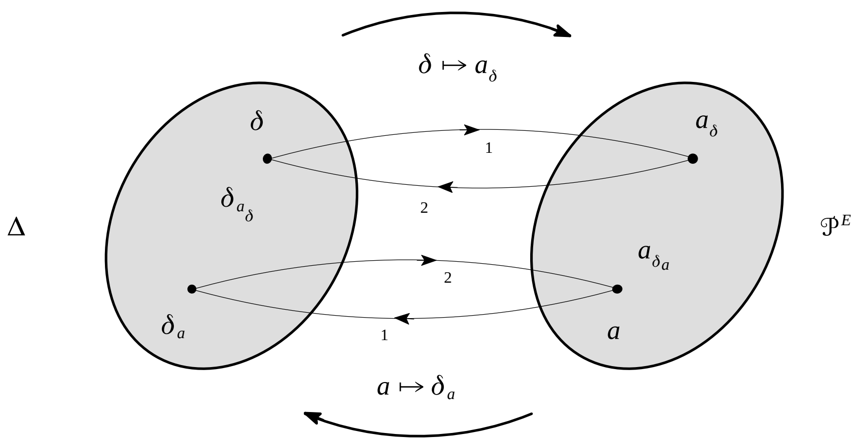

Fig. 3.2 – Bijeção entre as dilatações e as funções estruturantes.

A Figura 3.3 mostra quatro modos de representar uma dilatação por um bloquinho. Em (a) e (d) fazemos uma referência explícita à dilatação. Em (b) e (c) a dilatação é caracterizada pela sua função estruturante. Para um dado subconjunto X, o subconjunto $\delta_a(X)$ chama–se *dilatação de X pela função estruturante a*.

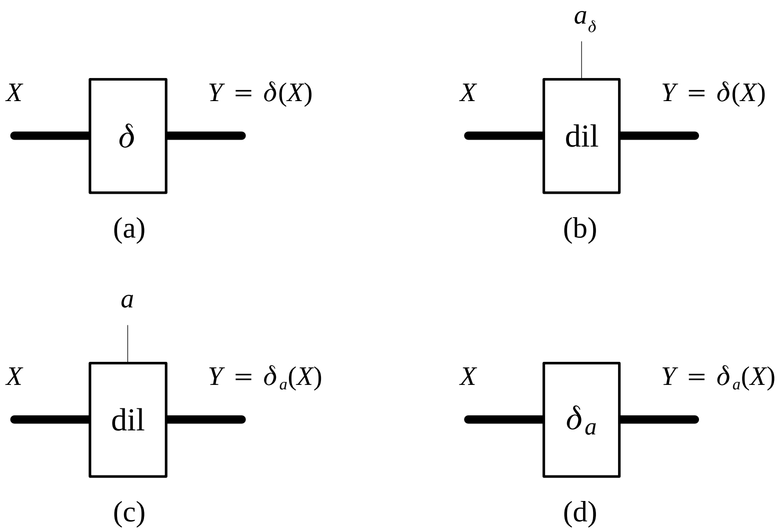

Fig. 3.3 – Quatro modos de representar uma dilatação.

Podemos caracterizar de uma maneira análoga as erosões, anti–dilatações e anti–erosões por funções estruturantes. Nestes casos, para um dado subconjunto X, os subconjuntos $\epsilon_a(X)$, $\delta^{\mathrm{a}}{}_{a}(X)$ e $\epsilon^{\mathrm{a}}{}_{a}(X)$ chamam–se, respectivamente, *erosão*, *anti–dilatação* e *anti–erosão de X pela função estruturante a*. A caracterização das erosões será apresentada no próximo capítulo.

3.3 Operações sobre operadores

Os operadores podem ser combinados de duas maneiras muito úteis para produzir novos operadores. Uma primeira maneira, dita *paralela*, consiste em usar as operações de união e interseção entre subconjuntos.

Definição 3.6 (união e interseção entre operadores) – Sejam ψ_1 e ψ_2 dois operadores sobre $\mathcal{P}$.

A *união dos operadores ψ_1 e ψ_2* é o operador sobre $\mathcal{P}$, denotado $\psi_1 \vee \psi_2$ e dado por

$$(\psi_1 \vee \psi_2)(X) = \psi_1(X) \cup \psi_2(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

A operação de *união entre dois operadores*, denotada $\vee$, é o mapeamento dado por

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \psi_1 \vee \psi_2.$$

A *interseção dos operadores ψ_1 e ψ_2* é o operador sobre $\mathcal{P}$, denotado $\psi_1 \wedge \psi_2$ e dado por

$$(\psi_1 \wedge \psi_2)(X) = \psi_1(X) \cap \psi_2(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

A operação de *interseção entre dois operadores*, denotada $\wedge$, é o mapeamento dado por

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \psi_1 \wedge \psi_2. \qquad \square$$

A Figura 3.4 ilustra a construção da união e interseção de dois operadores, através de bloquinhos.

Seja ψ um operador sobre $\mathcal{P}$. O *complemento do operador ψ* é o operador sobre $\mathcal{P}$, denotado $\sim \psi$ e dado por

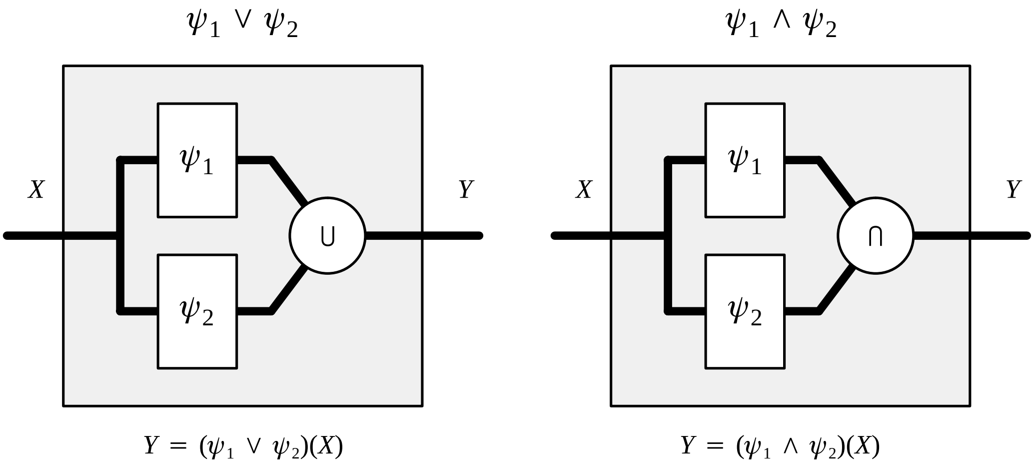

Fig. 3.4 – União e interseção de operadores.

$$(\sim \psi)(X) = \sim \psi(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

A operação de *complementação de um operador*, denotada $\sim$, é o mapeamento dado por

$$\psi \mapsto \sim \psi.$$

O conjunto $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \vee, \wedge, \sim)$ dos operadores sobre $\mathcal{P}$ provido das operações de união $\vee$, interseção $\wedge$ e complementação $\sim$ forma uma álgebra de Boole (por herança da álgebra de Boole dos subconjuntos).

As operações de união e interseção entre dois operadores estendem–se para famílias de operadores. Seja (ψ_i) uma família de operadores sobre $\mathcal{P}$ com índices em I.

A *união da família de operadores* ψ_i é o operador sobre $\mathcal{P}$ denotado $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ e definido por

$$(\bigvee_{i \in I} \psi_i)(X) = \bigcup_{i \in I} \psi_i(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

O mapeamento $(\psi_i) \mapsto \bigvee_{i \in I} \psi_i$ é a operação de *união entre os elementos de uma família de operadores*.

Da mesma maneira, a *interseção da família de operadores* ψ_i é o operador sobre $\mathcal{P}$ denotado $\bigwedge_{i \in I} \psi_i$ e definido por

$$(\bigwedge_{i \in I} \psi_i)(X) = \bigcap_{i \in I} \psi_i(X) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

O mapeamento $(\psi_i) \mapsto \bigwedge_{i \in I} \psi_i$ é a operação de *interseção entre os elementos de uma família de operadores*.

A comparação entre certos operadores se faz em termos de uma relação construída a partir da definição da relação $\subset$ entre subconjuntos.

O *operador* ψ_1 *é menor que o operador* ψ_2, denota–se $\psi_1 \leq \psi_2$, se e somente se, para todo X em $\mathcal{P}$, $\psi_1(X) \subset \psi_2(X)$, isto é,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Leftrightarrow (\psi_1(X) \subset \psi_2(X)\ (X \in \mathcal{P})).$$

A relação $\leq$ entre operadores é chamada de *relação* "*menor que*". Esta relação é obtida por ordenação puntual.

Seja ι o *operador identidade*, isto é,

$$\iota(X) = X \quad (X \in \mathcal{P}).$$

Pela a definição da relação "menor que" entre operadores, um operador ψ é extensivo se e somente se $\iota \leq \psi$ e anti–extensivo se e somente se $\psi \leq \iota$.

A relação $\leq$ entre operadores é uma relação de ordem e o conjunto $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \leq)$ dos operadores sobre $\mathcal{P}$ provido da relação $\leq$ forma um conjunto parcialmente ordenado. Este conjunto provido das operações de união e interseção estendidas às famílias de operadores forma também um reticulado completo (por herança do reticulado dos subconjuntos, como aconteceu com as funções binárias). Em outros termos, para todo conjunto de indices I, estas operações verificam, para toda família $(\psi_i)_{i \in I}$ de operadores sobre $\mathcal{P}$,

$$\bigvee_{i \in I} \psi_i = \sup \Psi_I \quad \text{e} \quad \bigwedge_{i \in I} \psi_i = \inf \Psi_I\,,$$

onde Ψ_I é a imagem de I através a família $(\psi_i)_{i \in I}$, isto é,

$$\Psi_I = \{\psi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}} :\ \exists i \in I,\ \psi_i = \psi\}.$$

O conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \leq)$ possue um maior elemento, que é $X \mapsto E$, e um menor elemento, que é $X \mapsto \emptyset$.

Proposição 3.6 (sub–reticulados dos operadores extensivos e anti–extensivos) – O conjunto dos operadores extensivos (resp. anti–extensivos) é um *sub–reticulado completo* de $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \leq)$, isto é, a união e a interseção de qualquer família de operadores extensivos (resp. anti–extensivos) são operadores extensivos (resp. anti–extensivos). □

Prova – Seja $(\psi_i)_{i \in I}$ uma família de operadores extensivos e seja ψ_k um operador desta família, então, para todo $A \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} A &\subset \psi_k(A) && \text{(hipótese)} \\ &\subset \bigcup_{i \in I} \psi_i(A) && \text{(propriedade da união)} \\ &= (\bigvee_{i \in I} \psi_i)(A), && \text{(definição da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}}) \end{aligned}$$

isto é, $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ é extensivo.

Seja $(\psi_i)_{i \in I}$ uma família de operadores extensivos. Para todo $A \in \mathcal{P}$ e $i \in I$,

$$A \subset \psi_i(A). \qquad \text{(hipótese)}$$

Assim, para todo $A \in \mathcal{P}$,

$$A \subset \bigcap_{i \in I} \psi_i(A) \qquad \text{(propriedade da interseção)}$$

$$= (\bigwedge_{i \in I} \psi_i)(A), \qquad \text{(definição da interseção em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}}\text{)}$$

isto é, $\bigwedge_{i \in I} \psi_i$ é extensivo.

A prova relativa a anti–extensividade é similar a da extensividade. □

Em particular, se ψ_1 e ψ_2 são dois operadores extensivos (resp. anti–extensivos) então $\psi_1 \vee \psi_2$ e $\psi_1 \wedge \psi_2$ são extensivos (resp. anti–extensivos).

Proposição 3.7 (sub–reticulados dos operadores isotônicos e antitônicos) – O conjunto dos operadores isotônicos (resp. antitônicos) é um sub–reticulado completo de $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \leq)$, isto é, a união e a interseção de qualquer família de operadores isotônicos (resp. antitônicos) são operadores isotônicos (resp. antitônicos). □

Prova – Ver a prova em [Mather88, p. 122; HeiRon90, Proposition 2.2 (ii), p. 260]. □

Em particular, se ψ_1 e ψ_2 são dois operadores isotônicos (resp. antitônicos) então $\psi_1 \vee \psi_2$ e $\psi_1 \wedge \psi_2$ são isotônicos (resp. antitônicos).

O caso dos operadores elementares é mais complicado porque eles *não* formam sub–reticulados completos de $(\mathcal{P}^{\mathcal{P}}, \leq)$. Todavia, isto, longe de ser um inconveniente, dá uma chance para a decomposição dos operadores entre reticulados em termos de operadores elementares [BanBar93].

Vamos relembrar duas proposições importantes da teoria dos reticulados.

Proposição 3.8 (condições suficientes para ter um reticulado completo) – Seja $(\mathcal{L}, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$, o supremo de $\mathcal{X}$ existir então $(\mathcal{L}, \leq)$ é um reticulado completo e

$$\inf\mathcal{X} = \sup\mathcal{I}_{\mathcal{X}}, \text{ onde } \mathcal{I}_{\mathcal{X}} = \{Y \in \mathcal{L} : Y \text{ é l.i. de } \mathcal{X}\}.$$

Se, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$, o ínfimo de $\mathcal{X}$ existir então $(\mathcal{L}, \leq)$ é um reticulado completo e

$$\sup\mathcal{X} = \inf\mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \text{ onde } \mathcal{S}_{\mathcal{X}} = \{Y \in \mathcal{L} : Y \text{ é l.s. de } \mathcal{X}\}.$$ □

Prova – Vamos provar no caso da existência de um supremo. Em primeiro lugar, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$ e todo $A \in \mathcal{L}$

$$A = \sup\mathcal{I}_{\mathcal{X}} \Rightarrow (\forall X \in \mathcal{L}, X \text{ é l.s. de } \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \Rightarrow A \leq X) \qquad \text{(propriedade do supremo)}$$

$$\Rightarrow (\forall X \in \mathcal{X}, X \text{ é l.s. de } \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \Rightarrow A \leq X) \qquad (\mathcal{X} \subset \mathcal{L})$$

$$\Rightarrow \forall X \in \mathcal{X}, A \leq X \qquad (X \text{ é l.s. de } \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \text{ é verdade para todo } X \text{ em } \mathcal{X})$$

$$\Leftrightarrow A \text{ é l.i. de } \mathcal{X}. \qquad \text{(definição de l.i.)}$$

Isto é, $\sup\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ é l.i. de $\mathcal{X}$. Então, pela definição de limitante inferior e a transitividade de $\leq$, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$ e $A' \in \mathcal{L}$, temos $A' \leq \sup\mathcal{I}_{\mathcal{X}} \Rightarrow A'$ é l.i. de $\mathcal{X}$.

Em segundo lugar, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$ e $A' \in \mathcal{L}$,

$$A' \text{ é l.i. de } \mathcal{X} \Leftrightarrow A' \in \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \qquad \text{(definição de } \mathcal{I}_{\mathcal{X}}\text{)}$$

$$\Rightarrow A' \leq \sup \mathcal{I}_{\mathcal{X}}. \qquad \text{(propriedade do supremo)}$$

Isto é, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$ e $A' \in \mathcal{L}$, temos A' é l.i. de $\mathcal{X} \Rightarrow A' \leq \sup \mathcal{I}_{\mathcal{X}}$.

Assim, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$ e $A' \in \mathcal{L}$, temos A' é l.i. de $\mathcal{X} \Leftrightarrow A' \leq \sup \mathcal{I}_{\mathcal{X}}$. Isto é, pela definição de ínfimo, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$, temos $\inf \mathcal{X} = \sup \mathcal{I}_{\mathcal{X}}$. O que prova a existência do ínfimo a partir da existência do supremo.

No caso da existência de um ínfimo, a prova é similar [Birkho67, Theorem 3, p. 112]. □

Definição 3.7 (subconjunto sup–fechado e inf–fechado) – Um subconjunto $\mathcal{B}$ de um reticulado completo $(\mathcal{L}, \leq)$ é *sup–fechado* se e somente se para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$, o supremo de $\mathcal{X}$ (em $\mathcal{L}$), $\sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X}$, pertence a $\mathcal{B}$. Ele é *inf–fechado* se e somente se para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$, o ínfimo de $\mathcal{X}$ (em $\mathcal{L}$), $\inf_{\mathcal{L}} \mathcal{X}$, pertence a $\mathcal{B}$. □

Em outros termos, um subconjunto $\mathcal{B}$ de um reticulado completo $(\mathcal{L}, \leq)$ é sup–fechado (resp. inf–fechada) se e somente se a operação de união (resp. interseção) extendida a famílias sobre $(\mathcal{L}, \leq)$ é fechada em $\mathcal{B}$.

A segunda parte da próxima proposição é o Teorema 6, p. 7 em [Birkho67].

Proposição 3.9 (condição suficiente para um subconjunto de um reticulado completo ser um reticulado completo) – Seja $(\mathcal{L}, \leq)$ um reticulado completo e seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de $\mathcal{L}$. Se $\mathcal{B}$ é sup–fechado então, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$,

$$\sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} = \sup_{\mathcal{B}} \mathcal{X},$$

e $(\mathcal{B}, \leq)$ é um reticulado completo.

Se $\mathcal{B}$ é inf–fechado então, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$,

$$\inf_{\mathcal{L}} \mathcal{X} = \inf_{\mathcal{B}} \mathcal{X},$$

e $(\mathcal{B}, \leq)$ é um reticulado completo. □

Prova – Vamos provar no caso do subconjunto $\mathcal{B}$ ser sup–fechado. De um lado, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ e $A' \in \mathcal{B}$,

$$\left\{\begin{matrix} \sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \in \mathcal{B} \\ \text{e} \\ \sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \leq A' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \text{ é l.s. de } \mathcal{X} \text{ em } \mathcal{B} \\ \text{e} \\ \sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \leq A' \end{matrix}\right\} \qquad \text{(propriedade do supremo)}$$

$$\Rightarrow A' \text{ é l.s. de } \mathcal{X} \text{ em } \mathcal{B}. \qquad \text{(transitividade)}$$

Isto é, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ e $A' \in \mathcal{B}$,

$$(\sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \in \mathcal{B}) \Rightarrow (\sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \leq A' \Rightarrow A' \text{ é l.s. de } \mathcal{X} \text{ em } \mathcal{B}).$$

De outro lado, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ e $A' \in \mathcal{B}$,

$$A' \text{ é l.s. de } \mathcal{X} \text{ em } \mathcal{B} \Rightarrow A' \text{ é l.s. de } \mathcal{X} \text{ em } \mathcal{L} \qquad (\mathcal{B} \subset \mathcal{L})$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \leq A'. \qquad \text{(propriedade do supremo)}$$

Então necessáriamente, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ e $A' \in \mathcal{B}$,

$$(\sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \in \mathcal{B}) \Rightarrow (A' \text{ é l.s. de } \mathcal{X} \text{ em } \mathcal{B} \Rightarrow \sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \leq A').$$

Em outros termos, para todo $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$,

$$(\sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \in \mathcal{B}) \Rightarrow (\sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} \leq A' \Leftrightarrow A' \text{ é l.s. de } \mathcal{X} \text{ em } \mathcal{B}).$$

$$\Leftrightarrow \sup_{\mathcal{L}} \mathcal{X} = \sup_{\mathcal{B}} \mathcal{X}. \qquad \text{(definição de supremo)}$$

Isto prova que se $\mathcal{B}$ é sup–fechado então o supremo de qualquer subconjunto de $\mathcal{B}$ existe, e, pela Proposição 3.8, $\mathcal{B}$ é um reticulado completo.

No caso do subconjunto $\mathcal{B}$ ser inf–fechado, a prova é similar. □

Proposição 3.10 (propriedades dos operadores elementares) – O subconjunto Δ das dilatações (resp. E das erosões, Δ^a das anti–dilatações e E^a das anti–erosões) é um subconjunto sup–fechado (resp. inf–fechado, inf–fechado e sup–fechado) de $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$. □

Prova ([Serra88, p. 18; HeiRon90, Prop. 2.3]) – Vamos provar no caso do subconjunto Δ das dilatações. Para todo $\Psi \subset \Delta$ e $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
(\sup\Psi)(\sup\mathcal{X}) &= (\bigvee_{\psi \in \Psi} \psi)(\sup\mathcal{X}) && \text{(propriedade da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}}) \\
&= \bigcup_{\psi \in \Psi} \psi(\sup\mathcal{X}) && \text{(definição da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}}) \\
&= \bigcup_{\psi \in \Psi} \sup\psi(\mathcal{X}) && (\psi \text{ é dilatação}) \\
&= \bigcup_{\psi \in \Psi} \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \psi(X) && \text{(propriedade da união em } \mathcal{P}) \\
&= \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \bigcup_{\psi \in \Psi} \psi(X) && \text{(comutatividades das uniões)} \\
&= \bigcup_{X \in \mathcal{X}} (\bigvee_{\psi \in \Psi} \psi)(X) && \text{(definição da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}}) \\
&= \bigcup_{X \in \mathcal{X}} (\sup\Psi)(X) && \text{(propriedade da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}}) \\
&= \sup(\sup\Psi)(\mathcal{X}). && \text{(propriedade da união em } \mathcal{P})
\end{aligned}$$

Isto prova que $\sup\Psi \in \Delta$ e, consequentemente, que Δ é sup–fechado.

No caso de E, Δ^a e E^a, a prova é similar. □

Exercício 3.1 (propriedade das anti–dilatações) – Prove que as anti–dilatações formam um subconjunto inf–fechado de $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$. □

Pelas Proposições 3.9 e 3.10, o conjunto Δ das dilatações (resp. E das erosões, Δ^{a} das anti–dilatações e E^{a} das anti–erosões) provido da relação de ordem $\leq$ é um *reticulado completo*. Em particular, no caso das dilatações, para todo $\Psi \subset \Delta$, temos

$$\sup_{\mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \Psi = \sup_{\Delta} \Psi \quad \text{e} \quad \inf_{\Delta} \Psi \leq \inf_{\mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \Psi.$$

Aplicando às funções de E em $\mathcal{P}(E)$, os mesmos mecanismos de construção usados para prover os operadores sobre $\mathcal{P}$ das operações de união, interseção e complementação, e de uma relação de ordem consistente com a união e interseção, obtemos a álgebra de Boole $(\mathcal{P}(E)^{E}, \vee, \wedge, \sim)$ e o reticulado completo $(\mathcal{P}(E)^{E}, \leq)$.

Proposição 3.11 (isomorfismo de reticulados) – O reticulado Δ das dilatações e o reticulado das funções de E em $\mathcal{P}(E)$, são isomorfos. Em outros termos, $\delta \mapsto a_{\delta}$ é um isomorfismo de reticulado, isto é, $\delta \mapsto a_{\delta}$ é uma bijeção e para todo δ_1 e δ_2 em Δ,

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Leftrightarrow a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2}. \qquad \text{(isotonia dupla)}$$

□

Prova – Fazendo a hipótese que $\delta_1 \leq \delta_2$, para todo $y \in E$,

$$\begin{aligned} a_{\delta_1}(y) &= \delta_1(\{y\}) && \text{(definição de } a_{\delta}) \\ &\subset \delta_2(\{y\}) && \text{(hipótese)} \\ &= a_{\delta_2}(y), && \text{(definição de } a_{\delta}) \end{aligned}$$

isto é, $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2}$.

Fazendo a hipótese que $a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2}$, para todo $Y \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \delta_1(Y) &= \bigcup_{y \in Y} a_{\delta_1}(y) && \text{(caracterização da dilatação)} \\ &\subset \bigcup_{y \in Y} a_{\delta_2}(y) && \text{(hipótese e propriedade da união)} \\ &= \delta_2(Y), && \text{(caracterização da dilatação)} \end{aligned}$$

isto é, $a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2} \Rightarrow \delta_1 \leq \delta_2$. □

Proposição 3.12 (propriedade da união e interseção de dilatações) – Seja $(\delta_i)_{i \in I}$ uma família de dilatações sobre $\mathcal{P}$ e seja $(a_i)_{i \in I}$ a família das respectivas funções estrutrantes, isto é, $a_i = a_{\delta_i}$ para todo $i \in I$. Então

$$\delta_{\bigvee_{i \in I} a_i} = \bigvee_{i \in I} \delta_i$$

$$\delta_{\bigwedge_{i\in I} a_i} \leq \bigwedge_{i \in I} \delta_i . \qquad \square$$

Prova – Em relação à união,

$$\begin{aligned}
\delta_{\bigvee_{i\in I} a_i} &= \delta_{\sup \mathcal{A}_I} && \text{(propriedade da união em } \mathcal{P}(E)^E) \\
&= \sup_{\Delta} \Delta_I && \text{(consequência da Proposição 3.11)} \\
&= \sup_{\mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \Delta_I && \text{(Proposições 3.9 e 3.10)} \\
&= \bigvee_{i \in I} \delta_i . && \text{(propriedade da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}})
\end{aligned}$$

Em relação à interseção,

$$\begin{aligned}
\delta_{\bigwedge_{i\in I} a_i} &= \delta_{\inf \mathcal{A}_I} && \text{(propriedade da interseção em } \mathcal{P}(E)^E) \\
&= \inf_{\Delta} \Delta_I && \text{(consequência da Proposição 3.11)} \\
&\leq \inf_{\mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \Delta_I && (\Delta \subset \mathcal{P}^{\mathcal{P}}) \\
&= \bigwedge_{i \in I} \delta_i . && \text{(propriedade da interseção em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}})
\end{aligned}$$

$\square$

Em particular, a união de duas dialatações coincida com a dilatação que tem como função estruturante a união das funções estruturantes. A interseção de duas dilatações é maior que a dilatação que tem como função estruturante a interseção das funções estruturantes. Em outros termos,

$$\delta_{a_1 \vee a_2} = \delta_1 \vee \delta_2 \quad \text{e} \quad \delta_{a_1 \wedge a_2} \leq \delta_1 \wedge \delta_2.$$

A Proposição 3.12 indica um caminho para a decomposição de uma dilatação δ em termo de uma união de dilatações menores. Seja $(E_i)_{i\in I}$ uma *partição de E*, isto é, $(E_i)_{i\in I}$ é uma coleção de subconjuntos de E tais que $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Seja $(a_i)_{i\in I}$ a família de funções de E em $\mathcal{P}(E)$ dada por

$$a_i(y) = \begin{cases} a_\delta(y) & \text{se } y \in E_i \\ \emptyset & \text{c.c.} \end{cases} \qquad (y \in E)$$

Por construção $a_\delta = \bigvee_{i \in I} a_i$. Então, pela Proposição 3.12, $\delta = \bigvee_{i \in I} \delta_{a_i}$.

Sejam a_1 e a_2 as funções de E em $\mathcal{P}(E)$ mapeando os pontos x_1 e x_2 de E (pontos marquados com bolinhas pretas) nos subconjuntos da Figura 3.5 (pontos nas áreas cinzas). A Figura 3.6 mostra os subconjuntos mapeados por $a_1 \vee a_2$ e $a_1 \wedge a_2$ nos pontos x_1 e x_2. A Figura 3.7 mostra os subconjuntos transformados do subconjunto $\{x_1, x_2\}$ pelas dilatações $\delta_{a_1} \vee \delta_{a_2}$ e $\delta_{a_1 \vee a_2}$. Conforme a teoria estes subconjuntos são iguais. A Figura 3.8 mostra os subconjuntos transformados do subconjunto $\{x_1, x_2\}$ pelas dilatações $\delta_{a_1} \wedge \delta_{a_2}$ e $\delta_{a_1 \wedge a_2}$. Conforme a teoria estes subconjuntos podem não ser iguais.

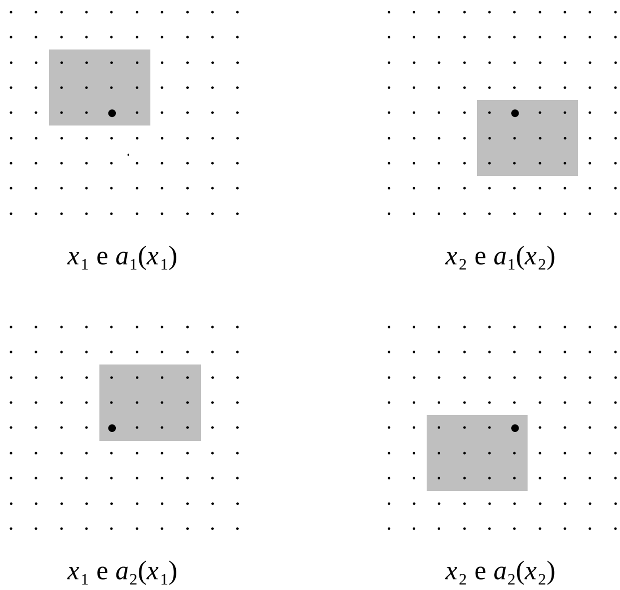

Fig. 3.5 – Especificação das funções estruturantes.

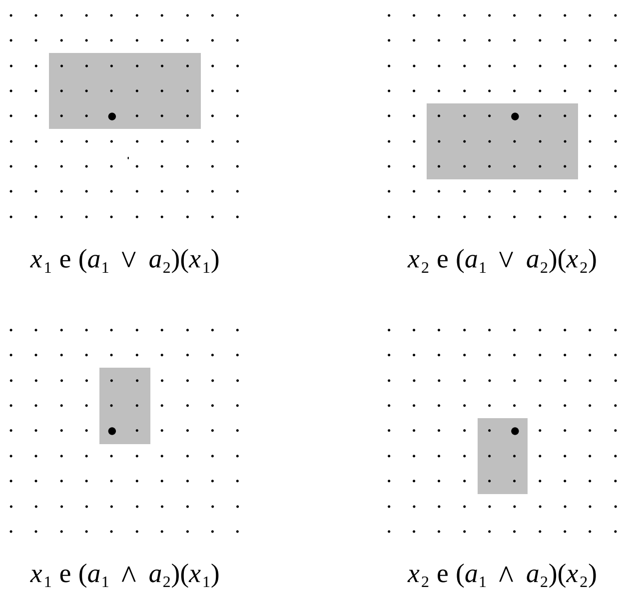

Fig. 3.6 – União e interseção das funções estruturantes.

Uma segunda maneira de combinar operadores, dita *sequencial* ou *serial*, consiste em ligar a saída de um operador com a entrada do outro.

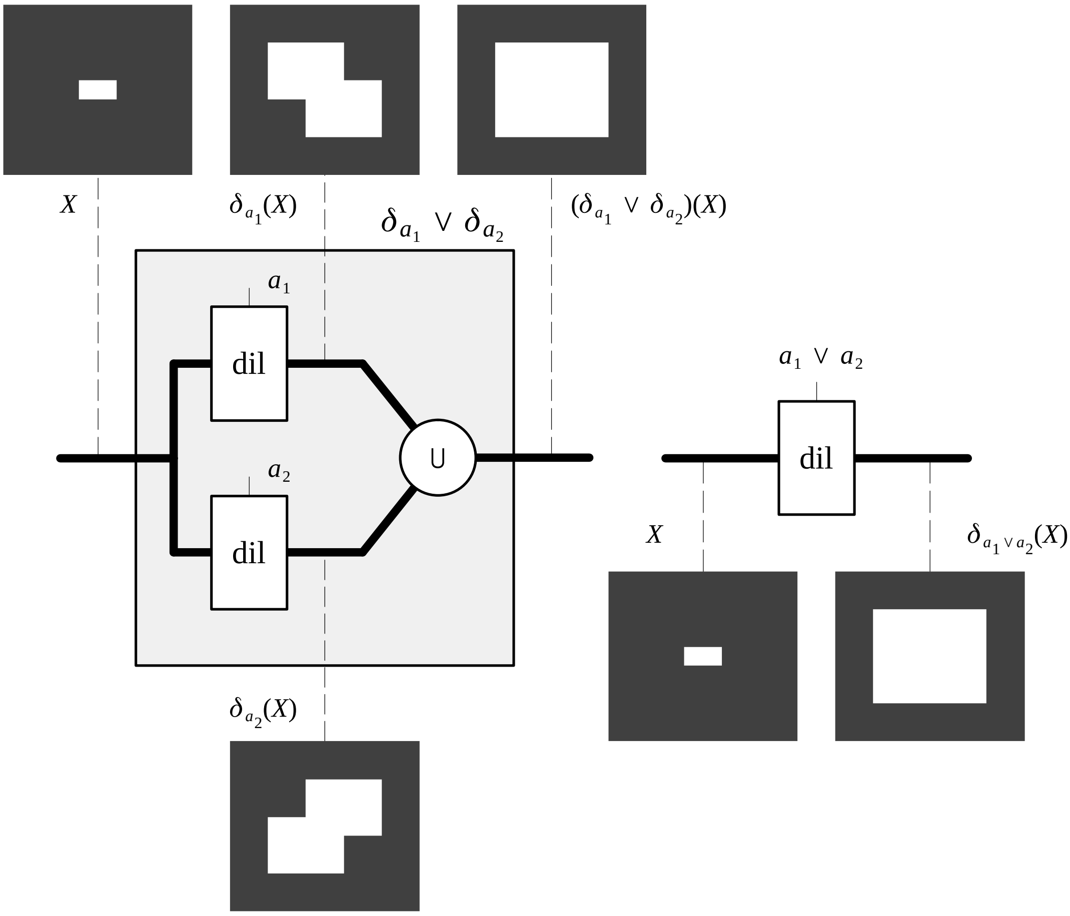

Fig. 3.7 – União de dilatações.

Definição 3.8 (composição de operadores) – Sejam ψ_1 e ψ_2 dois operadores sobre $\mathcal{P}$. O *composto* (ou *produto*) *do operador* ψ_1 *pelo operador* ψ_2 é o operador sobre $\mathcal{P}$, denotado $\psi_1\psi_2$ e dado por

$$(\psi_1\psi_2)(X) = \psi_1(\psi_2(X)) \quad (X \in \mathcal{P}).$$

A *composição de um operador por um outro* é o mapeamento dado por

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto \psi_1\psi_2 \; . \qquad \square$$

A Figura 3.9 ilustra a composição de um operador por um outro, através de bloquinhos.

Pela Definição 3.3, um operador ψ é idempotende de tipo 1 se e somente se

$$\psi\psi = \psi,$$

e é idempotente de tipo 2 se e somente se

$$\psi\psi = \iota.$$

Exercício 3.2 (associatividade da composição) – Mostre que a composição é associativa, isto é, para todo operador ψ_1, ψ_2 e ψ_3 sobre $\mathcal{P}$,

$$\psi_1(\psi_2\psi_3) = (\psi_1\psi_2)\psi_3 \; . \qquad \square$$

Proposição 3.13 (propriedades do composto) – Sejam ψ_1 e ψ_2 dois operadores sobre $\mathcal{P}$. O operador $\psi_1\psi_2$, composto do operador ψ_1 pelo operador ψ_2 tem as propriedades dadas nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3. □

Tabela 3.1 – EXTENSIVIDADE/ANTI–EXTENSIVIDADE DO COMPOSTO.

	ψ_2 é extensivo	ψ_2 é anti–ext.
ψ_1 é extensivo	$\psi_1\psi_2$ é extensivo	–
ψ_1 é anti–ext.	–	$\psi_1\psi_2$ é anti–ext.

Tabela 3.2 – ISOTONIA/ANTONIA DO COMPOSTO.

	ψ_2 é isotone	ψ_2 é antitone
ψ_1 é isotone	$\psi_1\psi_2$ é isotone	$\psi_1\psi_2$ é antitone
ψ_1 é antitone	$\psi_1\psi_2$ é antitone	$\psi_1\psi_2$ é isotone

Tabela 3.3 – CLASSE DO COMPOSTO.

	ψ_2 é dilatação	ψ_2 é erosão	ψ_2 é anti–dilatação	ψ_2 é anti–erosão
ψ_1 é dilatação	$\psi_1\psi_2$ é dilatação	–	–	$\psi_1\psi_2$ é anti–eros.
ψ_1 é erosão	–	$\psi_1\psi_2$ é erosão	$\psi_1\psi_2$ é anti–dil.	–
ψ_1 é anti–dilatação	$\psi_1\psi_2$ é anti–dil.	–	–	$\psi_1\psi_2$ é erosão
ψ_1 é anti–erosão	–	$\psi_1\psi_2$ é anti–eros.	$\psi_1\psi_2$ é dilatação	–

Exercício 3.3 (propriedades da composição) – Prove que o composto de uma anti–dilatação por uma anti–erosão é uma erosão. □

Finalmente, as maneiras paralela e sequencial de combinar os operadores podem ser combinadas.

Proposição 3.14 (união e interseção versus composição) – Para todo operador ϕ sobre $\mathcal{P}$ e toda família $(\psi_i)_{i\in I}$ de operadores sobre $\mathcal{P}$,

$$(\bigvee_{i \in I} \psi_i)\phi = \bigvee_{i \in I} \psi_i\phi \quad \text{e} \quad (\bigwedge_{i \in I} \psi_i)\phi = \bigwedge_{i \in I} \psi_i\phi;$$

se ϕ é uma dilatação,

$$\phi(\bigvee_{i \in I} \psi_i) = \bigvee_{i \in I} \phi\psi_i;$$

se ϕ é uma erosão,

$$\phi(\bigwedge_{i \in I} \psi_i) = \bigwedge_{i \in I} \phi\psi_i;$$

se ϕ é uma anti–dilatação,

$$\phi(\bigvee_{i \in I} \psi_i) = \bigwedge_{i \in I} \phi\psi_i;$$

se ϕ é uma anti–erosão,

$$\phi(\bigwedge_{i \in I} \psi_i) = \bigvee_{i \in I} \phi\psi_i. \qquad \square$$

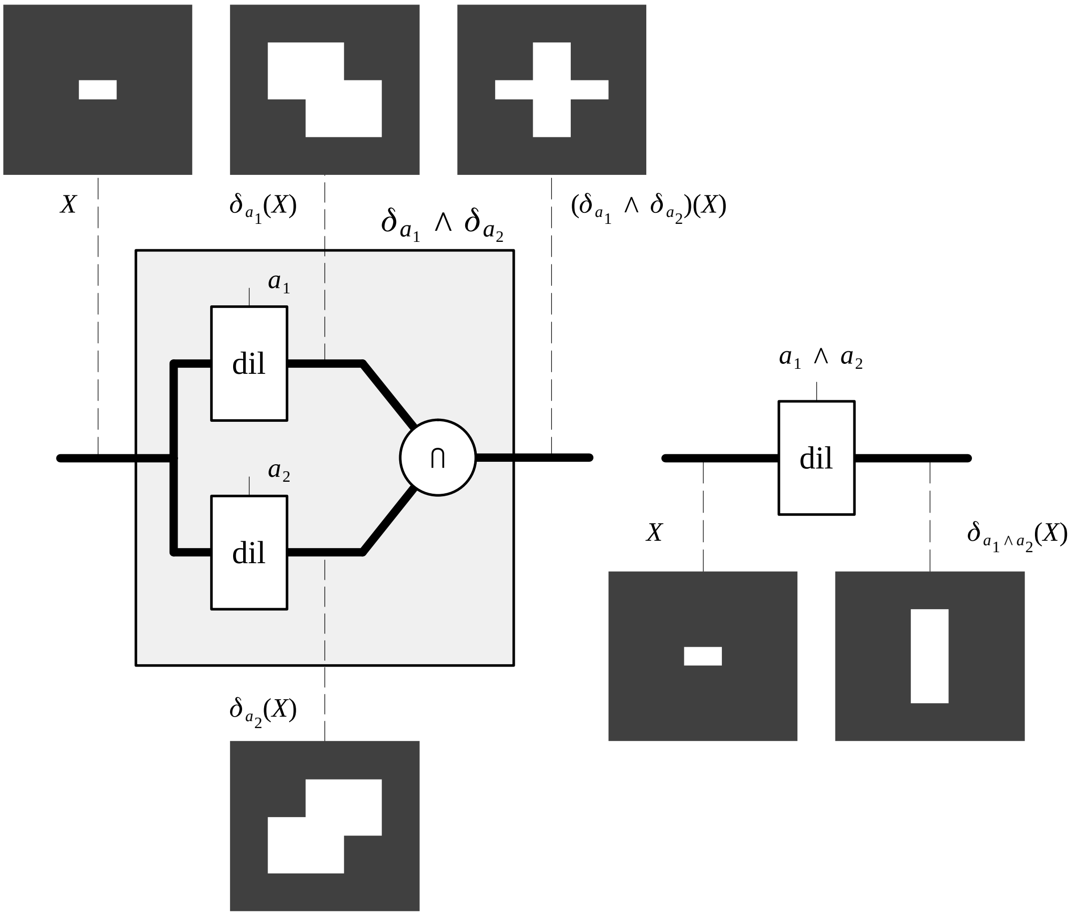

Fig. 3.8 – Interseção de dilatações.

Prova – Para todo operador ϕ sobre $\mathcal{P}$, toda família $(\psi_i)_{i \in I}$ de operadores sobre $\mathcal{P}$, e $X \in \mathcal{P}$,

$$((\bigvee_{i \in I} \psi_i)\phi)(X) = (\bigvee_{i \in I} \psi_i)(\phi(X)) \qquad \text{(definição da composição)}$$

$$= \bigcup_{i \in I} \psi_i(\phi(X)) \qquad \text{(definição da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}}\text{)}$$

$$= \bigcup_{i \in I} (\psi_i \phi)(X) \qquad \text{(definição da composição)}$$

$$= (\bigvee_{i \in I} \psi_i \phi)(X). \qquad \text{(definição da união em } \mathcal{P}^{\mathcal{P}}\text{)}$$

A prova relativa à interseção é similar a relativa à união. As outras igualdades são consequência direta das definições dos operadores elementares. □

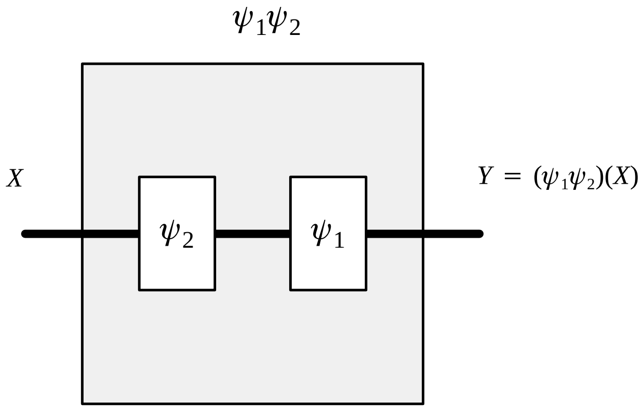

Fig. 3.9 – Composição de operadores.

Proposição 3.15 (relação de ordem versus composição) – Para todo operador ϕ, ψ_1 e ψ_2 sobre $\mathcal{P}$,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Rightarrow \psi_1\phi \leq \psi_2\phi;$$

se ϕ é isotônico,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Rightarrow \phi\psi_1 \leq \phi\psi_2;$$

se ϕ é antitônico,

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Rightarrow \phi\psi_2 \leq \phi\psi_1.$$ □

Exercício 3.4 (relação de ordem versus composição) – Prove a primeria e segunda implicação do enunciado da Proposição 3.15. □

Observamos que a composição de dois operadores elementares pode *não* ser comutativa. Por exemplo, sejam x e y dois pontos de E e sejam a_1 e a_2 duas funções tomando os seguintes valores em x e y: $a_1(x) = \{x\}$, $a_1(y) = \{x\}$ e $a_2(x) = \{y\}$. Então, $\delta_{a_2}\delta_{a_1}(\{x\}) = \{y\}$ e $\delta_{a_1}\delta_{a_2}(\{x\}) = \{x\}$. Isto é, neste caso, $\delta_{a_2}\delta_{a_1} \neq \delta_{a_1}\delta_{a_2}$.