

# Capítulo 9

## Caixa de ferramentas da Morfologia

### Matemática

Ao longo das últimas três décadas a Morfologia Matemática tem sido aplicada intensivamente a problemas de análise de imagens. Esses experimentos propiciaram o desenvolvimento de uma família de operadores úteis para a identificação de propriedades geométricas de imagens binárias: a caixa de ferramentas da Morfologia Matemática. Neste capítulo, estudamos alguns desses operadores, que podem ser entendidos como frases da LM ou, equivalentemente, programas de uma MMach.

Os operadores parametrizados por elementos estruturantes primitivos são chamados *operadores primitivos*. Os programas de uma MMach podem ser organizados hierarquicamente, conforme a sua decomposição em termos de operadores primitivos de dilatação e de erosão. Os programas mais complexos são aqueles que envolvem um número maior desses operadores primitivos. Assim, tomando uma ordem crescente de complexidade, definimos as seguintes famílias de programas: programas básicos, programas de níveis 1, 2 e 3.

Os programas do nível básico são os operadores primitivos de dilatação e de erosão, e as operações de união, interseção, complemento e subtração.

#### 9.1 Programas de nível 1

Os programas do nível 1 são construídos usando no máximo uma vez cada programa do nível básico.

Alguns programas do nível 1 são: a anti-dilatação, a anti-erosão, os operadores de abertura e de fechamento morfológico, os operadores sup-gerador e inf-gerador, a dilatação e a erosão condicional, e o extrator de borda.

No *extrador de bordas* (ver Capítulo 7)  $\psi_{A,B} = \delta_A \sim \epsilon_B$ , se  $A$  é o singleton que contém a origem e  $B$  o losângulo (a cruz) ou o quadrada  $3 \times 3$  então  $\psi_{A,B}$  extrai as *bordas internas*. Analogamente, se  $A$  é o losângulo (a cruz) ou o quadrada  $3 \times 3$  e  $B$  é o singleton que contém a origem, então  $\psi_{A,B}$  extrai as *bordas externas*. Se  $A$  e  $B$  são ambos o losângulo (a cruz) ou o quadrada  $3 \times 3$ , então  $\psi_{A,B}$  extrai a união das bordas internas e externas, e é chamado de *gradiente morfológico*.

**Definição 9.1** (gradiente morfológico) – Seja  $A$  o losângulo (a cruz) ou o quadrada  $3 \times 3$ , o operador sobre  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\psi_{A,A} = \delta_A \sim \epsilon_A$ , é chamado de *gradiente morfológico*.  $\square$

Em Análise de Imagens, os operadores sup-geradores (ver Capítulo 7) são importantes para reconhecer configurações de pontos. Considerando o caso invariante por translação, a cada padrão ou intervalo fechado  $[A, B]$  de  $\mathcal{P}(E)$  temos associado o operador sup-gerador  $\lambda_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ . Usando a definição de intervalo fechado, temos, então, a seguinte definição equivalente para o operador sup-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}(E)$

$$\lambda_{A,B}(X) = \{x \in E : (X - x) \in [A, B]\} \quad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

Quando  $A$  e  $B^c$  são subconjuntos do quadrado elementar,  $\lambda_{A,B}$  é chamado de *operador sup-gerador primitivo*.

A Figura 9.1 apresenta alguns padrões usualmente empregados. O padrão  $\mathcal{G}_1$  permite identificar os pontos onde um feixe de vetores verticais, orientados de cima para baixo, intercepta os objetos. Os padrões  $\mathcal{G}_2$  e  $\mathcal{G}_3$  identificam, respectivamente, os pontos isolados e os buracos puntuais. Os padrões  $\mathcal{G}_4$ ,  $\mathcal{G}_5$  e  $\mathcal{G}_6$  identificam pontos triplos. O padrão  $\mathcal{G}_7$  identifica pontos extremos. O padrão  $\mathcal{G}_8$  identifica quadrados de lado 3.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \begin{bmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \mathcal{G}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{G}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathcal{G}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{G}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{G}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathcal{G}_7 &= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{G}_8 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 9.1 – Alguns padrões empregados em Análise de Imagens.

A rotação em torno da origem dos padrões não simétricos da Figura 9.1 cria outros padrões interessantes, que permitem identificar estruturas geométricas similares rotacionadas. Denotaremos por  $\mathcal{G}^0$ ,  $\mathcal{G}^{45}$ ,  $\mathcal{G}^{90}$ , ...  $\mathcal{G}^{270}$ ,  $\mathcal{G}^{315}$  o resultado da rotação no sentido horário de um padrão  $\mathcal{G}$ , respectivamente, de 0, 45, 90, ... 270, 315 graus.

A Figura 9.2 apresenta as rotações por 90, 180 e 270 graus do padrão  $\mathcal{G}_4$  que identifica pontos triplos.

O operador inf-gerador sobre  $\mathcal{P}(E)$  é dual do operador sup-gerador. Usando a definição de intervalo fechado, temos, no caso invariante por translação, a seguinte definição equivalente para o operador inf-gerador de parâmetros  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}(E)$

$$\mu_{A,B}(X) = \{x \in E : (X^c - x) \notin [A^t, B^t]\} \quad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

$$g_4^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad g_4^{90} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad g_4^{180} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_4^{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 9.2 – Rotações de um padrão.

Analogamente ao operador sup-gerador, o operador inf-gerador serve para reconhecer configurações de pontos que aparecem no complemento da imagem.

Quando  $A$  e  $B^c$  são subconjuntos do quadrado elementar,  $\mu_{A,B}$  é chamado de *operador inf-gerador primitivo*.

**Definição 9.2** (afinamento e espessamento) – Sejam  $A$  e  $B$  dois elementos de  $\mathcal{P}(E \oplus E^l)$  tais que  $A \subset B$ . Os operadores  $\sigma_{A,B}$  e  $\tau_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados pelas seguintes composições,

$$\sigma_{A,B} = \iota \sim \lambda_{A,B} \text{ e } \tau_{A,B} = \iota \vee \lambda_{A,B},$$

são chamados, respectivamente, de *afinamento* e de *espessamento de parâmetros  $A$  e  $B$* . □

No afinamento e no espessamento, os pixels da imagem transformada posicionados na origem de estruturas identificadas receberão, respectivamente, o valor 0 e o valor 1, enquanto os demais continuarão com o mesmo valor que tinham na imagem original. As Figuras 9.3 e 9.4 apresentam, respectivamente, um exemplo de afinamento e de espessamento.

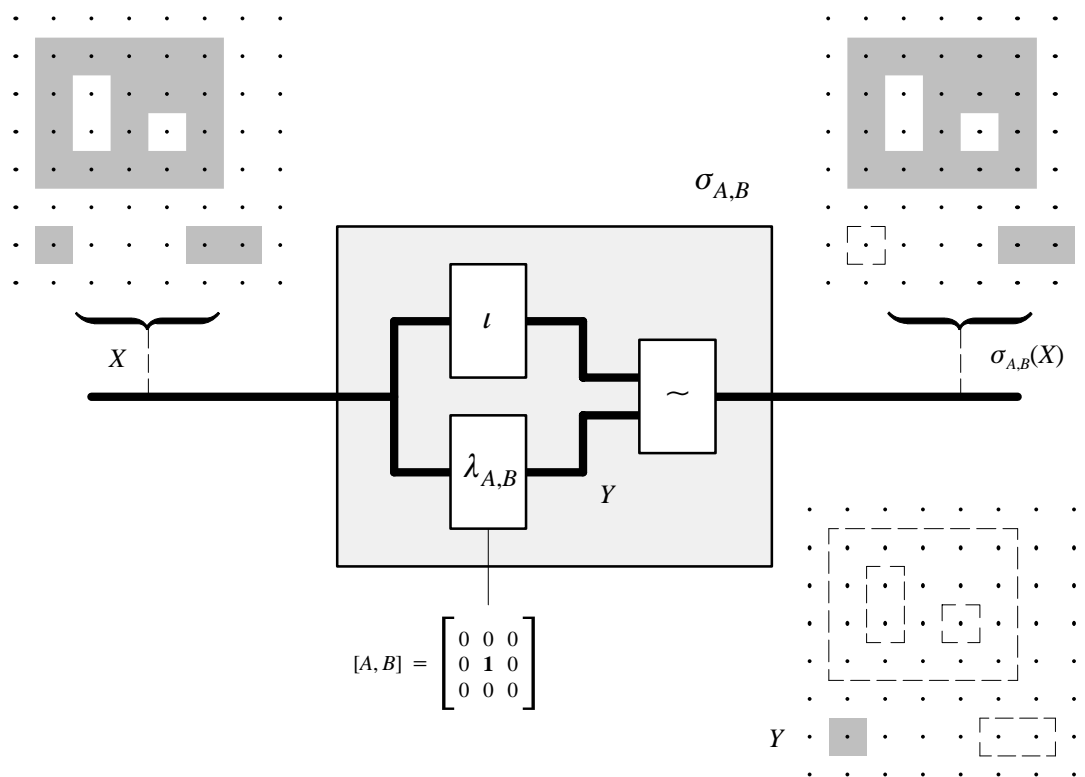


Fig. 9.3 – Afinamento.

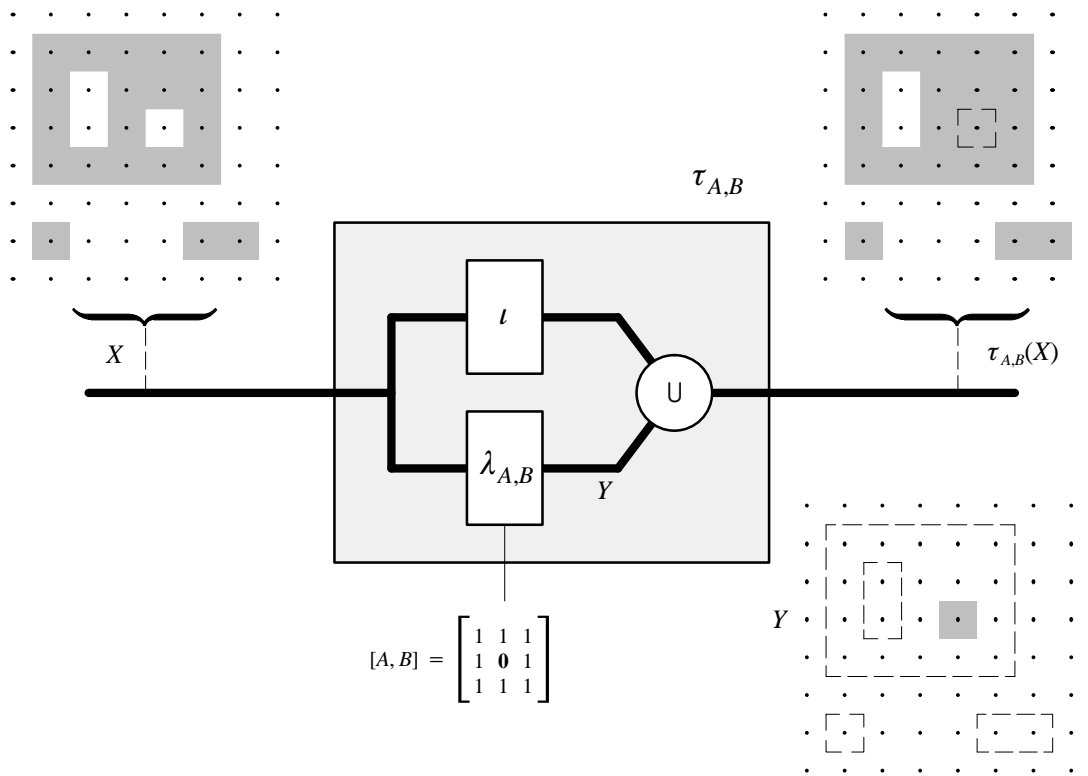


Fig. 9.4 – Espessamento.

O afinamento de uma imagem e do seu complemento pelo padrão  $\mathcal{J}_8$  da Figura 9.1 produzem, respectivamente, as bordas internas e externas da imagem.

O afinamento e o espessamento podem ser operadores homotópicos ou não, dependendo da escolha dos subconjuntos  $A$  e  $B$ . Como consequência do Teorema 4.1 em [KonRos89, p. 367], podemos estabelecer, no caso de  $A$  e  $B^c$  serem subconjuntos do quadrado elementar centrado na origem, a seguinte regra para testar a homotopia destes operadores: o afinamento  $\sigma_{A,B}$  ou o espessamento  $\tau_{A,B}$  é um operador

$4$ -homotópico (resp.  $8$ -homotópico) se, para todo  $X \in [A, B]$ , os subconjuntos  $X \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $X^c \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  são não vazios e, respectivamente,  $8$ -conexo (resp.  $4$ -conexo) e  $4$ -conexo (resp.  $8$ -conexo).

Essa regra garante que apenas pontos simples da imagem e do fundo sejam modificados pelos operadores de afinamento e de espessamento homotópicos. A condição de que a restrição dos subconjuntos extraídos do intervalo  $[A, B]$  e seus respectivos complementos sejam não vazias garante que os pontos modificados sejam pontos de borda (interna ou externa), mas não sejam pontos isolados ou buracos pontuais. A condição de conexidade garante que os pontos de borda modificados não alterem a árvore de adjacência da imagem.

As Figuras 9.3, 9.4 e 9.5, e 9.6 apresentam exemplos de aplicações de afinamento e de espessamento, respectivamente, não  $4$ -homotópico e  $4$ -homotópico (ou  $8$ -homotópico).

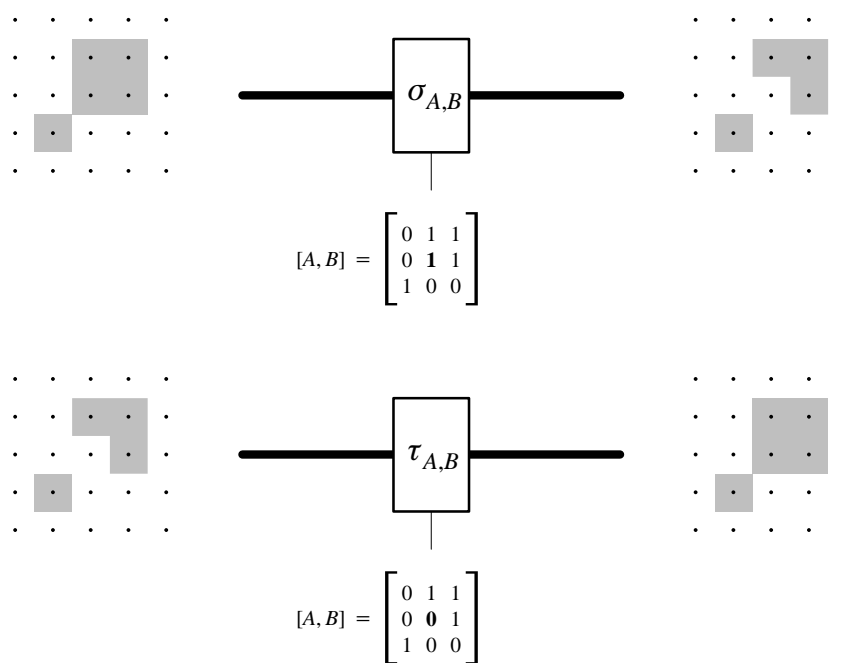


Fig. 9.5 – Afinamento e espessamento não homotópico.

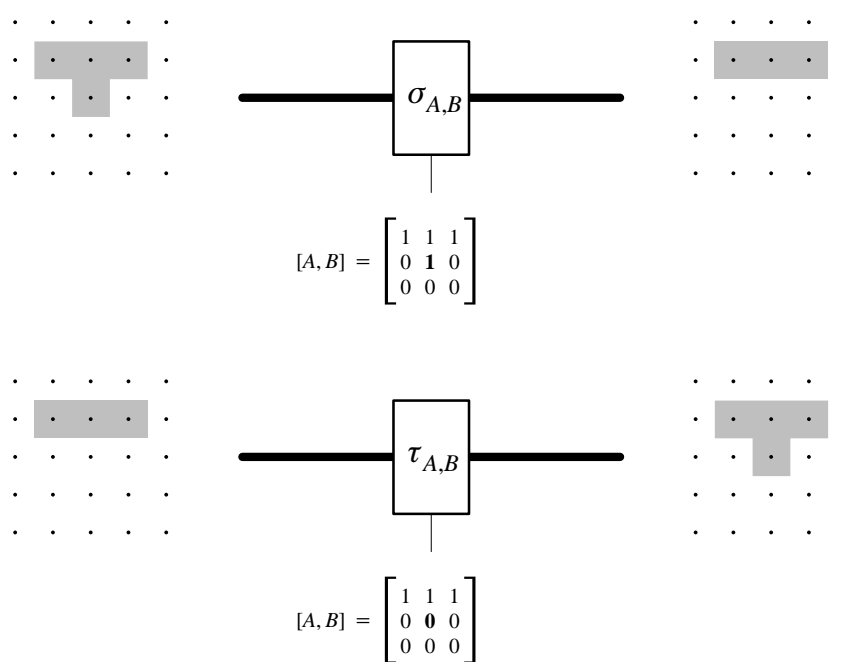


Fig. 9.6 – Afinamento e espessamento homotópico.

A Figura 9.7 apresenta alguns padrões comumente usados como parâmetros de afinamentos e de espessamentos 4-homotópicos.

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \mathbf{0} & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \mathfrak{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad \mathfrak{g}_5 = \begin{bmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & \mathbf{1} & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad \mathfrak{g}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \mathbf{1} & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 9.7 – Alguns padrões para afinamentos e espessamentos 4-homotópicos.

O afinamento e o espessamento são dois operadores duais, relacionados pela expressão

$$\sigma_{A,B}^* = \tau_{B^c,A^c}$$

Enquanto o afinamento é um operador anti-extensivo, o espessamento é um operador extensivo. É interessante observar também que estes operadores são ambos não idempotentes [Friedl86].

**Definição 9.3** (afinamento e espessamento condicional) – Sejam  $A$  e  $B^c$  dois subconjuntos do quadrado elementar tais que  $A \subset B$ . Seja  $Y$  um subconjunto de  $E$ . Os operadores primitivos  $\sigma_{A,B,Y}$  e  $\tau_{A,B,Y}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados pelas seguintes composições,

$$\sigma_{A,B,Y} = \sigma_{A,B} \vee Y \quad \text{e} \quad \tau_{A,B,Y} = \tau_{A,B} \wedge Y,$$

são chamados, respectivamente, *afinamento* e *espessamento condicional (ou geodésico) de parâmetros  $A$  e  $B$ , dado  $Y$* .  $\square$

O efeito da restrição à  $Y$  nesses dois operadores é similar ao efeito desta mesma restrição, respectivamente, na erosão e na dilatação condicional.

O afinamento e o espessamento condicional são operadores duais relacionados pela expressão

$$\sigma_{A,B,Y}^* = \tau_{B^c,A^c,Y^c}$$

A Figura 9.8 ilustra a aplicação de afinamentos e espessamentos sucessivos para a restauração e extração das bordas da imagem da moça. O primeiro afinamento elimina os pontos isolados. O espessamento preenche os buracos pontuais. O segundo afinamento extrai as bordas.

**Exercício 9.1** (Caixa de Ferramentas da MM) – Implemente os programas do nível 1 na forma de workspaces do sistema KHOROS, usando os “glyphs” do módulo “tools” e do nível básico da “MMach toolbox”.  $\square$

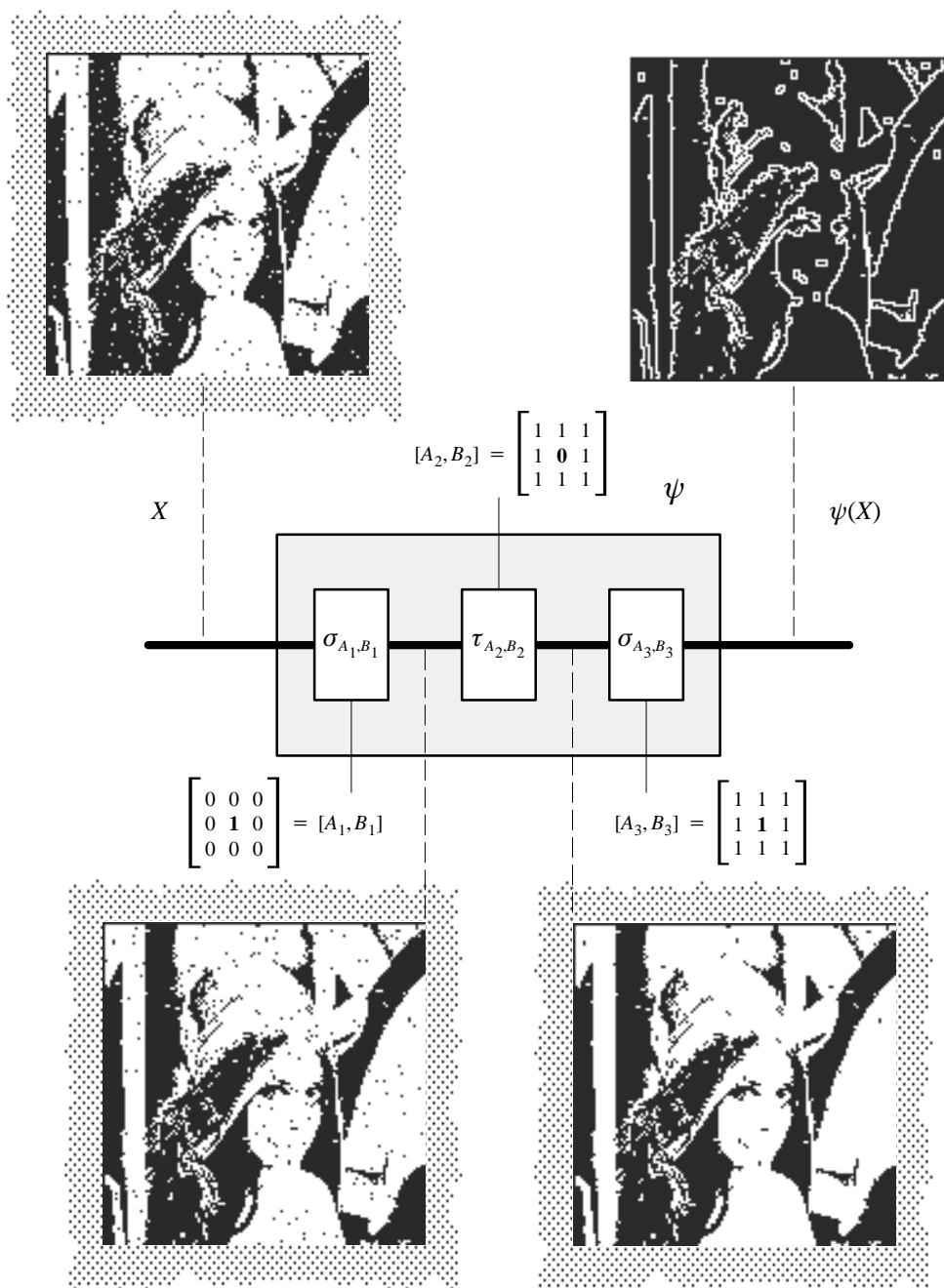


Fig. 9.8 – Restauração e extração de bordas.

## 9.2 Programas de nível 2

Os programas do nível 2 são construídos usando mais de uma vez pelo menos um programa do nível básico.

Seja  $\approx$  a operação definida de  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  em  $\mathcal{P}(E)$  por

$$X \approx Y = (X \sim Y) \vee (Y \sim X) \quad (X, Y \in \mathcal{P}(E)).$$

O conjunto  $X \approx Y$  é chamado de *diferença simétrica entre X e Y*.

O resultado da diferença simétrica entre dois subconjuntos  $X$  e  $Y$  é o subconjunto formado pelos pontos que estão em  $X$  e não estão em  $Y$  e pelos pontos que estão em  $Y$  e não estão em  $X$ . Como o próprio nome sugere, a diferença simétrica é uma operação comutativa.

**Definição 9.4** (*n*-dilatação e *n*-erosão) – Os operadores primitivos  $\delta_B^n$  e  $\epsilon_B^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  dados, para  $n > 0$ , pelas seguintes  $n - 1$  composições sucessivas

$$\delta_B^n = (\delta_B)^n \quad \text{e} \quad \epsilon_B^n = (\epsilon_B)^n$$

e, para  $n = 0$ ,  $\delta_B^n = \iota$  e  $\epsilon_B^n = \iota$ ,

são chamados, respectivamente, de *n*-dilatação e *n*-erosão por  $B$ . □

Observamos que  $\delta_B^n$  e  $\epsilon_B^n$  são, respectivamente, equivalentes a dilatação e a erosão por  $nB$ . Se  $B$  é igual a  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , ou  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , então  $nB$  é um disco de centro na origem e raio  $n$ , segundo, respectivamente, a distância usual na reta na direção horizontal, a distância usual na reta na direção vertical, a distância de quarteirão e a distância do valor máximo [DirRoh72, p. 109]. A Figura 9.9 ilustra a aplicação da erosão por discos, segundo a distância de quarteirão, à imagem da moça.

Os operadores primitivos  $\delta_{B_1, B_2}^{m, n}$  e  $\epsilon_{B_1, B_2}^{m, n}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados, para  $m \geq 0$  e  $n \geq 0$ , pelas seguintes composições

$$\delta_{B_1, B_2}^{m, n} = \delta_{B_1}^m \delta_{B_2}^n \quad \text{e} \quad \epsilon_{B_1, B_2}^{m, n} = \epsilon_{B_1}^m \epsilon_{B_2}^n,$$

são chamados de *nm*-dilatação e *nm*-erosão por  $B_1$  e  $B_2$ .

De fato,  $\delta_{B_1, B_2}^{m, n}$  e  $\epsilon_{B_1, B_2}^{m, n}$  são, respectivamente, equivalentes a dilatação e a erosão por  $mB_1 \oplus nB_2$ . Se  $B_1$

é igual a  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B_2$  é igual a  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , então  $mB_1 \oplus nB_2$  é um retângulo de tamanho  $m \times n$ . Se  $B_1$  é

igual a  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_2$  é igual a  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  então  $mB_1 \oplus nB_2$  é um octógono. Se  $(m, n)$  é igual a  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,

$(2, 1)$ ,  $(2, 2)$  ou  $(3, 2)$ , então o octógono é um disco Euclidiano discreto de centro na origem e raio  $n + m$ . Para outros valores de  $(m, n)$ , o octógono não é mais o disco Euclidiano discreto. A Figura 9.10 ilustra a aplicação de erosões por discos Euclidianos discretos.

Seja  $\mathfrak{B}$  uma sequência finita de  $n$  elementos estruturantes primitivos  $B_i$ , isto é,  $\mathfrak{B} = (B_i)_{i=1,2,\dots,n}$ . Os operadores  $\delta_{\mathfrak{B}}$  e  $\epsilon_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições



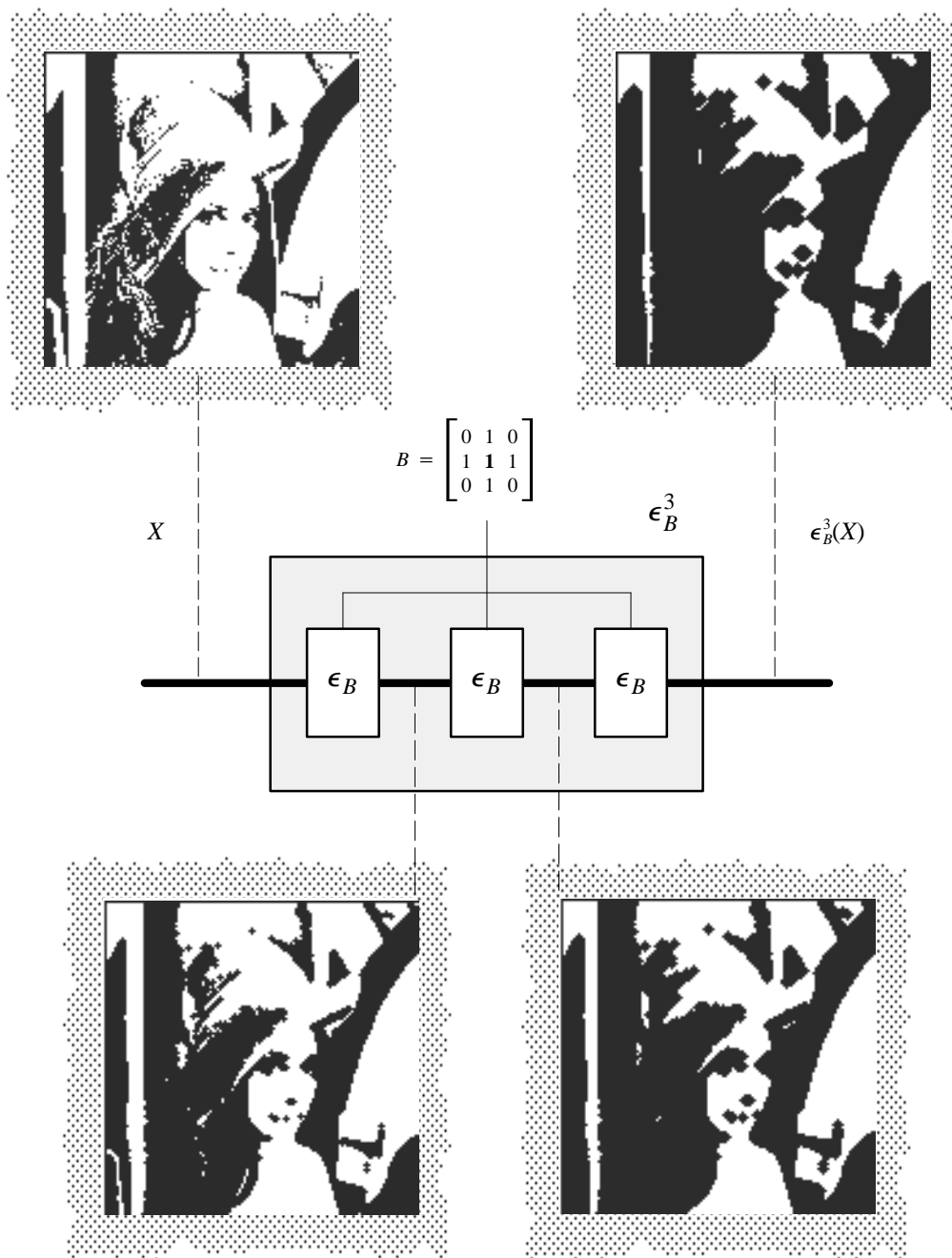


Fig. 9.9 – Erosão por discos, segundo a distância de quarteirão.

$$\delta_{\mathfrak{B}} = \delta_{B_n} \delta_{B_{n-1}} \dots \delta_{B_1} \quad \text{e} \quad \epsilon_{\mathfrak{B}} = \epsilon_{B_n} \epsilon_{B_{n-1}} \dots \epsilon_{B_1}$$

são chamados, respectivamente, de *dilatação convexa* e *erosão convexa* por  $\mathfrak{B}$ . Estes operadores receberam esses nomes, pois realizam dilatações e erosões por subconjuntos convexos.

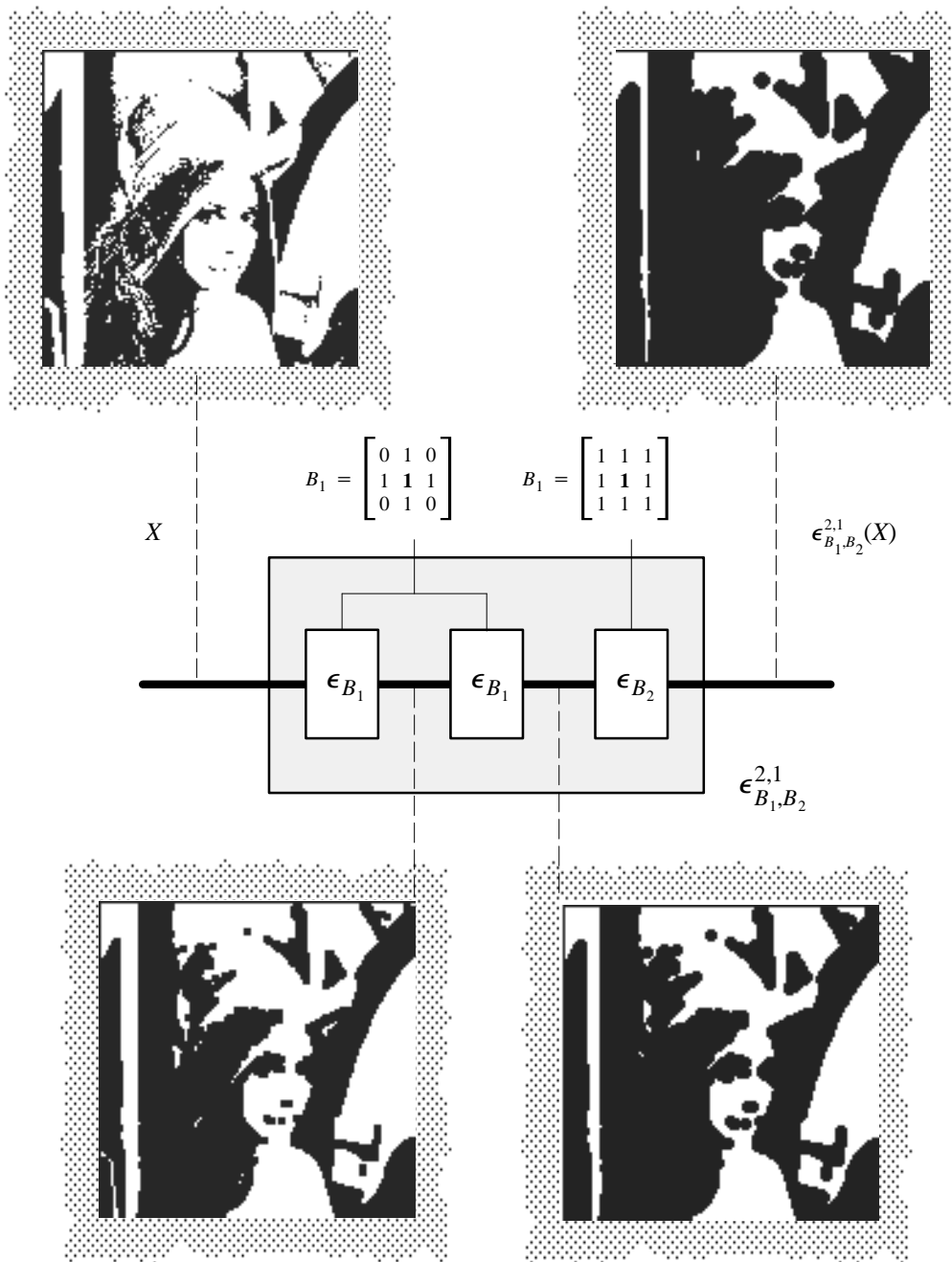


Fig. 9.10 – Erosões por discos Euclidianos discretos.

Seja  $\mathbf{B}$  uma seqüência finita de  $n$  seqüências de elementos estruturantes primitivos  $\mathfrak{B}_i$ . Os operadores  $\delta_{\mathbf{B}}$  e  $\epsilon_{\mathbf{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\delta_{\mathbf{B}} = \delta_{\mathfrak{B}_1} \cup \delta_{\mathfrak{B}_2} \cup \dots \cup \delta_{\mathfrak{B}_n} \quad \text{e} \quad \epsilon_{\mathbf{B}} = \epsilon_{\mathfrak{B}_1} \cap \epsilon_{\mathfrak{B}_2} \cap \dots \cap \epsilon_{\mathfrak{B}_n}$$

são chamados, respectivamente, de *dilatação genérica* e *erosão genérica* por  $\mathbf{B}$ . Estes operadores receberam esses nomes, porque realizam dilatações e erosões por subconjuntos quaisquer.

Seja  $\mathfrak{B} = (B_i)_{i=1,2,\dots,n}$  e seja  $\mathbf{B}_{\mathfrak{B}}$  uma seqüência de  $n$  seqüências de elementos estruturantes primitivos  $\mathfrak{B}_i$ , tais que  $\mathfrak{B}_i = (B_j)_{j=1,2,\dots,i}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Os operadores  $\delta_{\mathbf{B}_{\mathfrak{B}}}$  e  $\epsilon_{\mathbf{B}_{\mathfrak{B}}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$  são chamados, respectivamente, *dilatação curva* e *erosão curva* por  $\mathbf{B}_{\mathfrak{B}}$ . Estes operadores receberam esses nomes, porque são particularmente úteis para realizar dilatações e erosões por curvas simples que contém a origem. Uma curva simples deste tipo pode ser representada por uma seqüência  $\mathfrak{B}$  tal que  $B_i \in \{L, O, N, S, \{o\}\}$ . A Figura 9.11 apresenta duas curvas simples e as respectivas seqüências  $\mathfrak{B}$ .

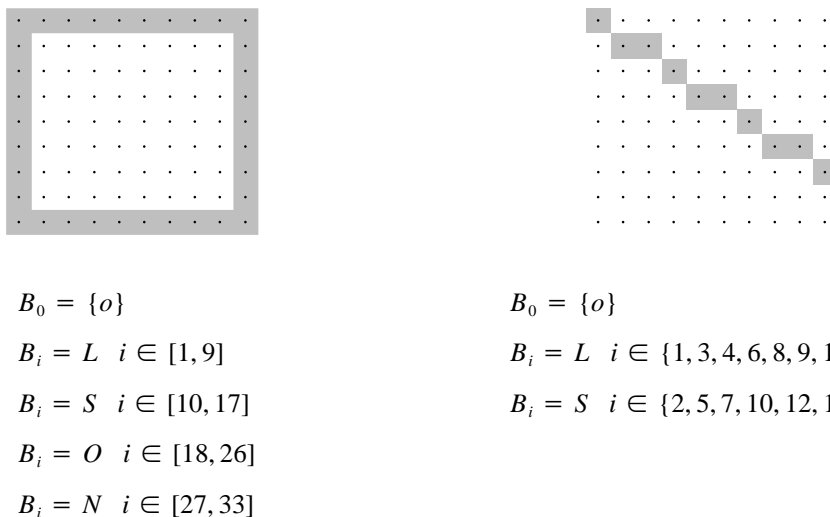


Fig. 9.11 – Representação de curvas simples.

Na Figura 9.12, o subconjunto  $X$  representa o corte transversal de uma liga metálica vista por um microscópio óptico. Na mesma figura aparecem as erosões sucessivas de  $X$  por um segmento de reta  $B$ , inclinados a 130 graus, de comprimento de 10 pontos. Note que a inclinação do segmento de reta usado como elemento estruturante coincide aproximadamente com a inclinação dos objetos encontrados na imagem.

**Definição 9.5** ( $n$ -abertura e  $n$ -fechamento) – Os operadores primitivos  $\gamma_B^n$  e  $\phi_B^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_B^n = \delta_B^n \epsilon_B^n \quad \text{e} \quad \phi_B^n = \epsilon_B^n \delta_B^n,$$

são chamados, respectivamente, de  $n$ -abertura e  $n$ -fechamento por  $B$ . □

Os operadores primitivos  $\gamma_{B_1, B_2}^{n,m}$  e  $\phi_{B_1, B_2}^{n,m}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_{B_1, B_2}^{n,m} = \delta_{B_1, B_2}^{n,m} \epsilon_{B_1, B_2}^{n,m} \quad \text{e} \quad \phi_{B_1, B_2}^{n,m} = \epsilon_{B_1, B_2}^{n,m} \delta_{B_1, B_2}^{n,m},$$

são chamados, respectivamente, de  $nm$ -abertura e  $nm$ -fechamento por  $B_1$  e  $B_2$ .

Os operadores  $\gamma_{\mathfrak{B}}$  e  $\phi_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_{\mathfrak{B}} = \delta_{\mathfrak{B}} \epsilon_{\mathfrak{B}} \quad \text{e} \quad \phi_{\mathfrak{B}} = \epsilon_{\mathfrak{B}} \delta_{\mathfrak{B}},$$

são chamados, respectivamente, de *abertura convexa* e *fechamento convexo* por  $\mathfrak{B}$ . A Figura 9.13 ilustra a aplicação de aberturas por discos Euclidianos discretos à imagem de células.

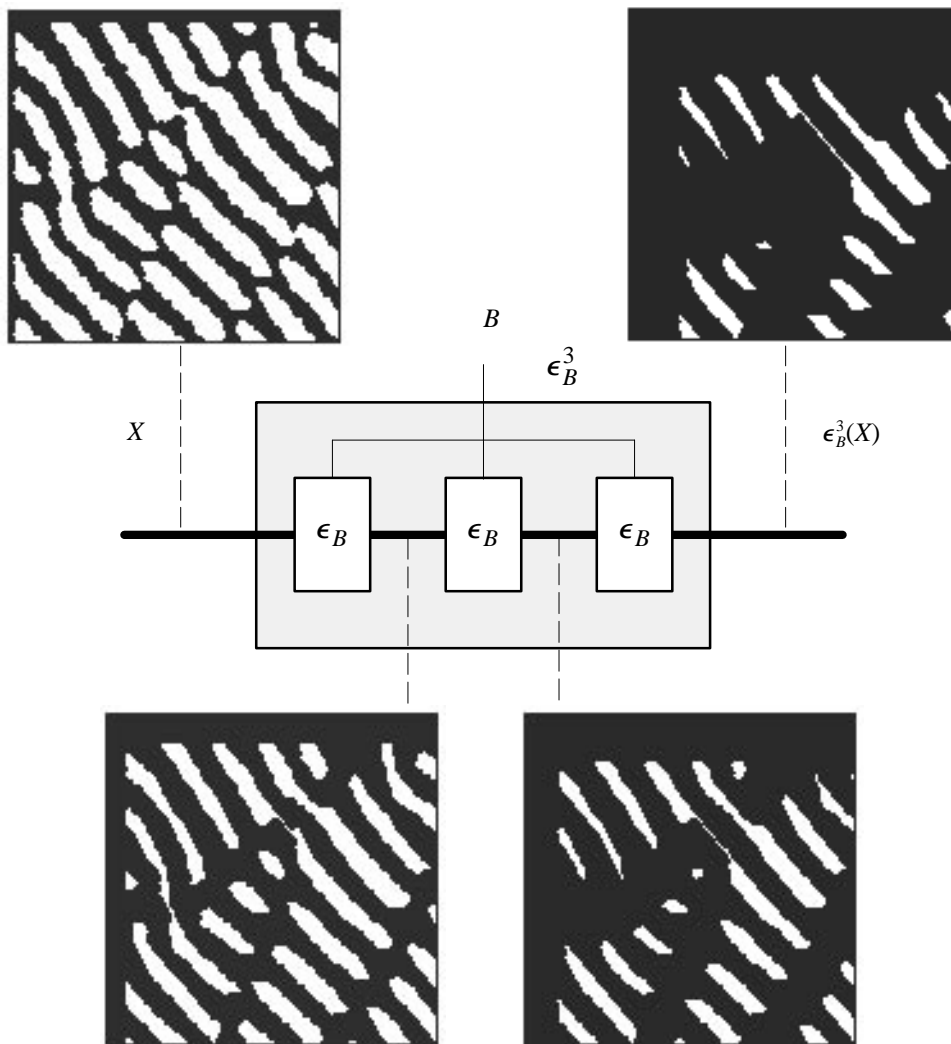


Fig. 9.12 – Erosão por um segmento de reta.

Os operadores  $\gamma_B$  e  $\phi_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_B = \delta_B \epsilon_B \quad \text{e} \quad \phi_B = \epsilon_B \delta_B$$

são chamados, respectivamente, de *abertura genérica* e *fechamento genérico por B*.

Os operadores  $\gamma_{B_{\boxplus}}$  e  $\phi_{B_{\boxplus}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\gamma_{B_{\boxplus}} = \delta_{B_{\boxplus}} \epsilon_{B_{\boxplus}} \quad \text{e} \quad \phi_{B_{\boxplus}} = \epsilon_{B_{\boxplus}} \delta_{B_{\boxplus}}$$

são chamados, respectivamente, de *abertura curva* e *fechamento curva por B<sub>⊕</sub>*.

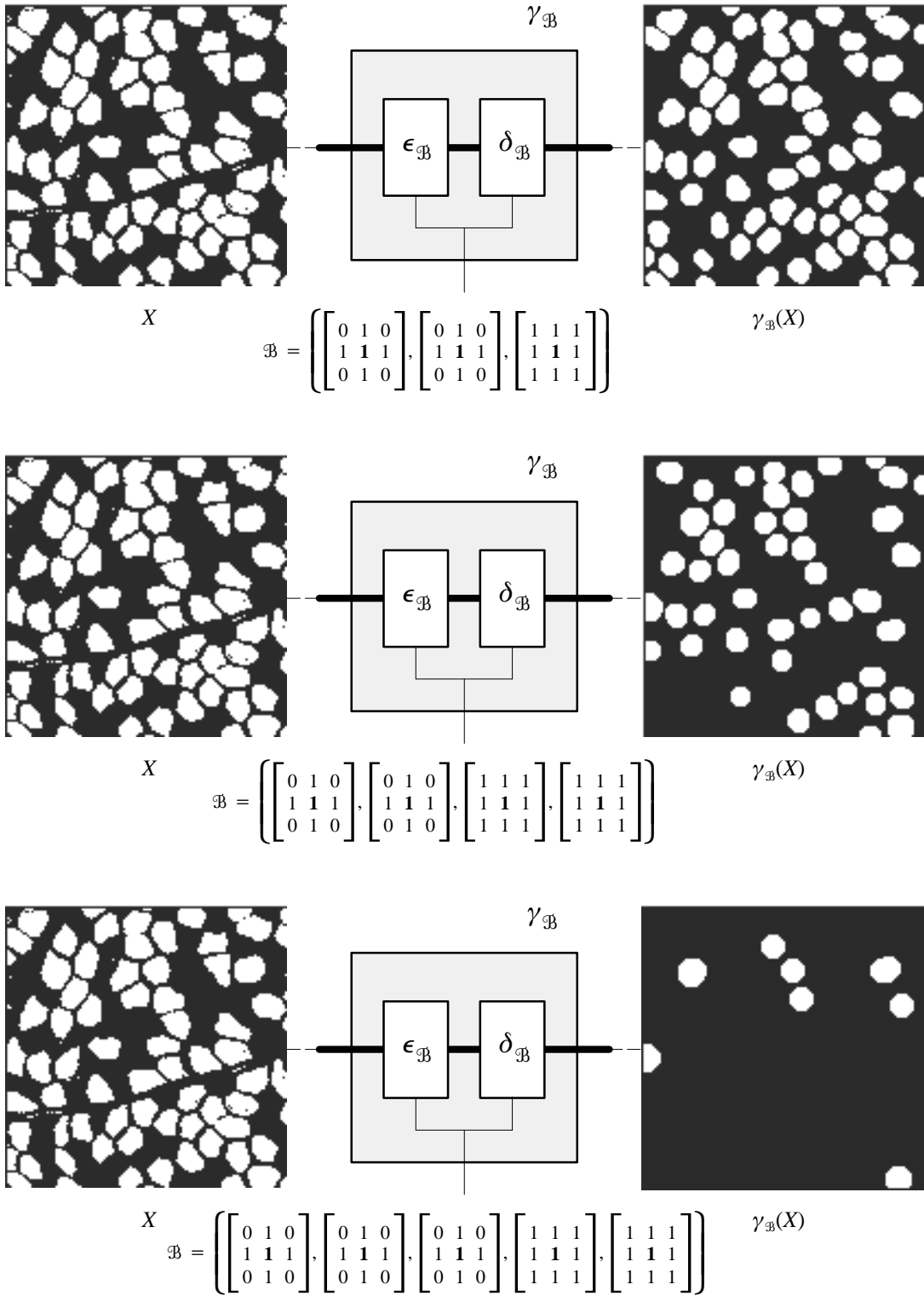


Fig. 9.13 – Abertura por discos Euclidianos discretos.

O operador  $\psi_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\psi_{A,B} = \phi_A \sim \gamma_B,$$

é chamado de *resíduo do fechamento em relação à abertura*. Se  $A$  é o singleton que contém a origem, então  $\psi_{A,B}$  conserva as estruturas das imagens que não contém propriamente translações de  $B$  e é chamado *operador cartola por  $B$* . Se  $B$  é o singleton que contém a origem, então  $\psi_{A,B}$  conserva as estruturas do complemento da imagem que não contém propriamente translações de  $A$ .

O operador  $\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \phi_{\mathcal{A}} \sim \gamma_{\mathcal{B}},$$

é chamado de *resíduo do fechamento convexo em relação à abertura convexa*. A Figura 9.14 ilustra a aplicação do resíduo do fechamento pelo singleton que contém a origem em relação a abertura por discos Euclidianos discretos, isto é, do operador cartola por discos Euclidianos discretos.

O operador  $\lambda_{A,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\lambda_{A,B} = \epsilon_A \wedge \delta^a_{B^c}$$

where  $\delta^a_{B^c} = \sim \delta_{B^c}$ , é chamado de *operador sup-gerador genérico*

Seja  $W \subset E$ , se as seqüências de seqüências de elementos estruturantes primitivos,  $A$  e  $B$  representam, respectivamente, os subconjuntos  $A \subset W$  e  $(W - A)^c$ , então  $\lambda_{A,B}$  identifica a forma  $A$  e é chamado *operador de reconhecimento genérico de forma*. A Figura 9.15 ilustra o uso do operador de reconhecimento genérico de forma para a identificação de um disco Euclidiano discreto de raio 3. A seqüência  $B = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_8)^{ct}$  que aparece nesta figura é definida pelas seguintes seqüências:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \left( 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right); & \mathcal{B}_2 &= \left( 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right); \\ \mathcal{B}_3 &= \left( 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right); & \mathcal{B}_4 &= \left( 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right); \\ \mathcal{B}_5 &= \left( 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right); & \mathcal{B}_6 &= \left( 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right); \\ \mathcal{B}_7 &= \left( 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right); & \mathcal{B}_8 &= \left( 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Em situações práticas, não existe uma única forma de interesse, mas sim, um conjunto de formas que correspondem a pequenas flutuações da forma  $A$ . O operador sup-gerador parametrizado por  $A \ominus B_1$  e  $(W - A \oplus B_2)^c$  permite identificar essas formas e é chamado de *operador de reconhecimento genérico de forma com folga*. A Figura 9.16 ilustra o uso do operador de reconhecimento genérico de formas com folga para a identificação de discos Euclidianos discretos. A seqüência  $B = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_8\}$  que aparece nesta figura é a mesma da Figura 9.15. Os subconjuntos  $B_1$  e  $B_2$ , usados para criar a folga em torno do disco discreto de raio 3, foram, respectivamente, o losângulo (a cruz)  $3 \times 3$  e o singleton que contém a origem.

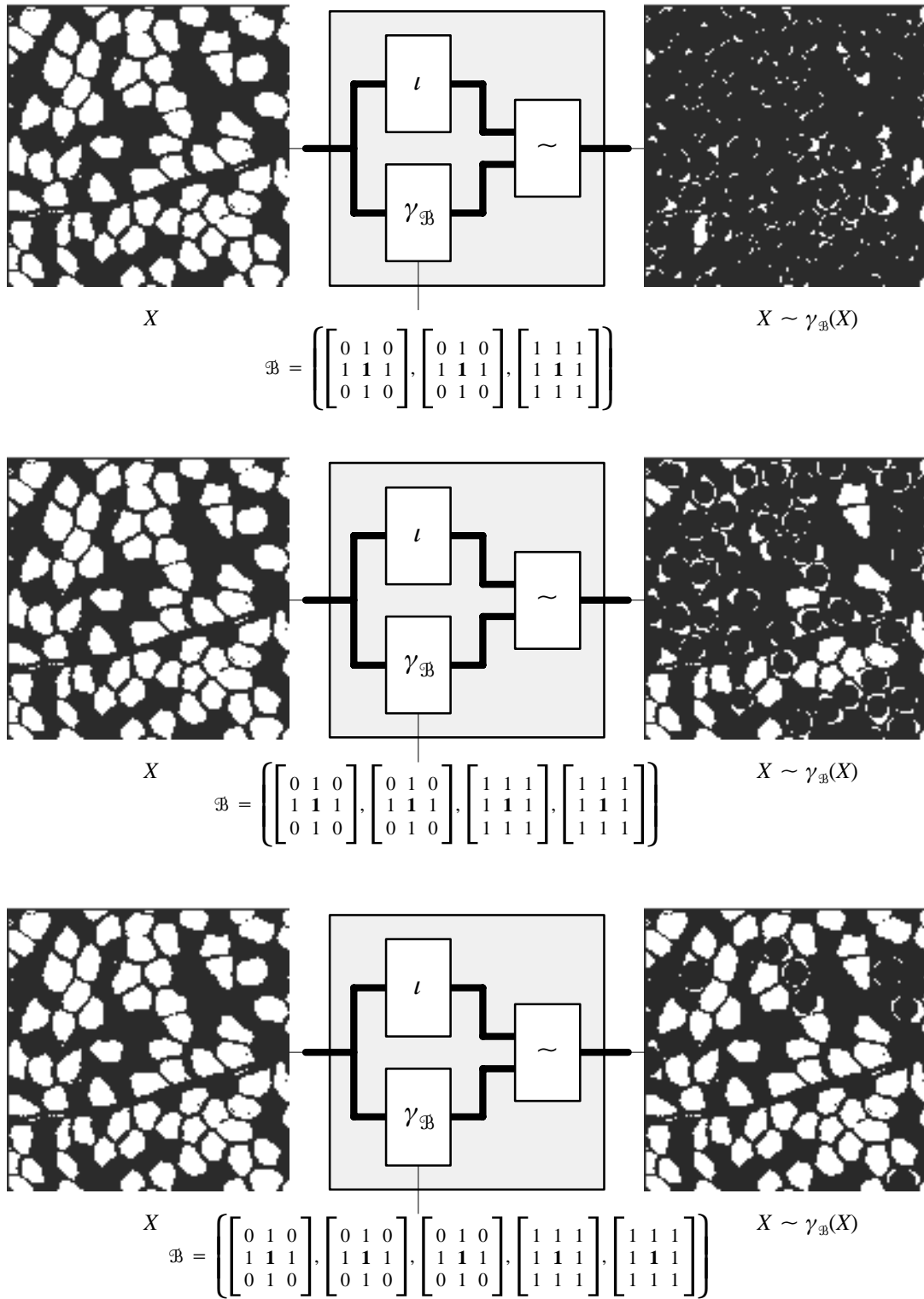


Fig. 9.14 – Operador cartola por discos Euclidianos discretos.

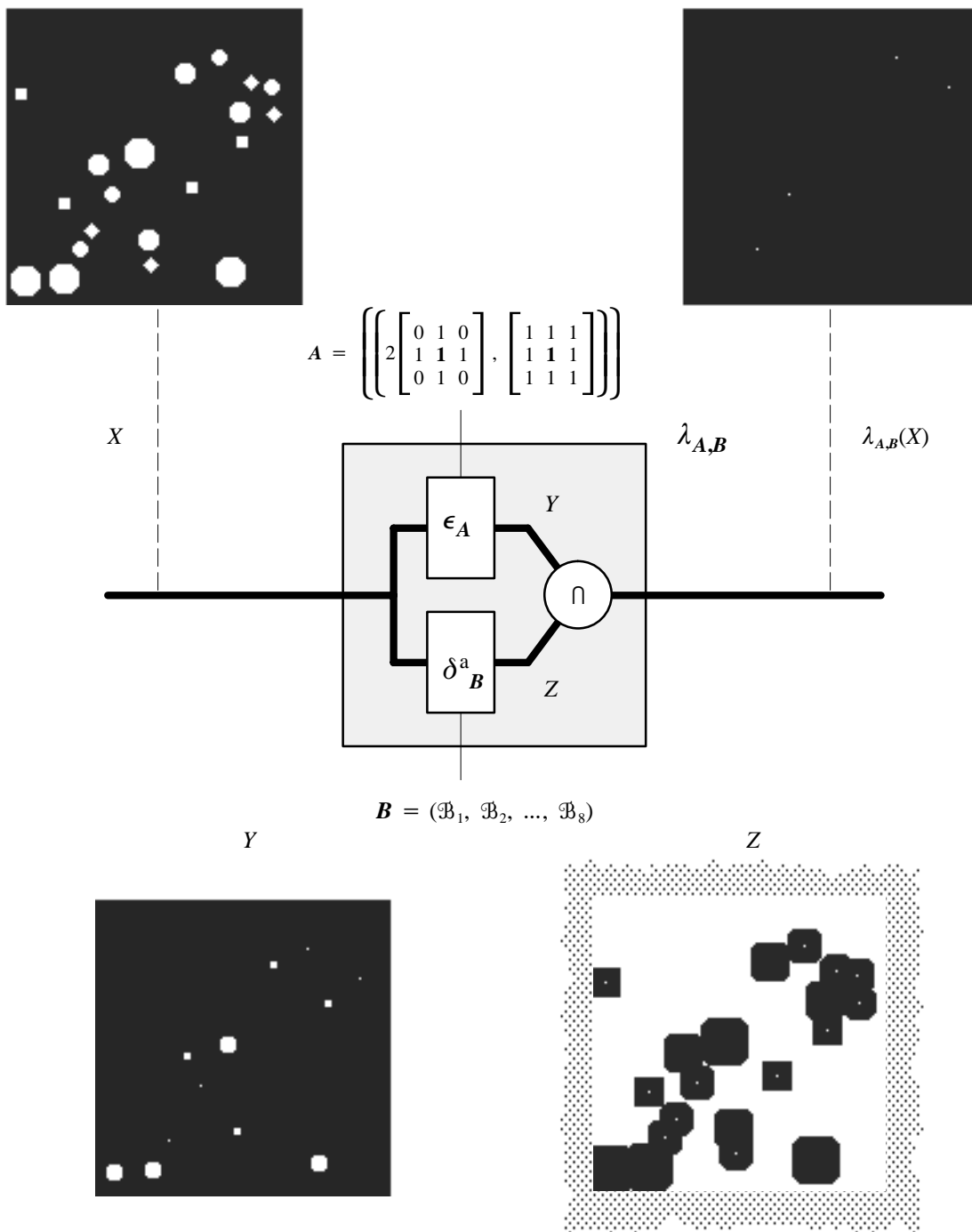


Fig. 9.15 – Reconhecimento genérico de forma.

É interessante observar que se  $E$  é o retângulo  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2)$ ,  $A$  representa o singleton que contém a origem e  $B$  representa o subconjunto  $\mathbf{Ret}(n_1, n_2) \cup ((\mathbf{Ret}(n_1, n_2) - ([0, 0] \times [0, n_2 - 1])) - (0, n_2 - 1))$ , então, para todo  $X \in \mathcal{P}$ ,

$$\lambda_{A,B}(X) = \{(u_1, \min \{x_2 \in [0, n_2 - 1] : (u_1, x_2) \in X\})\},$$



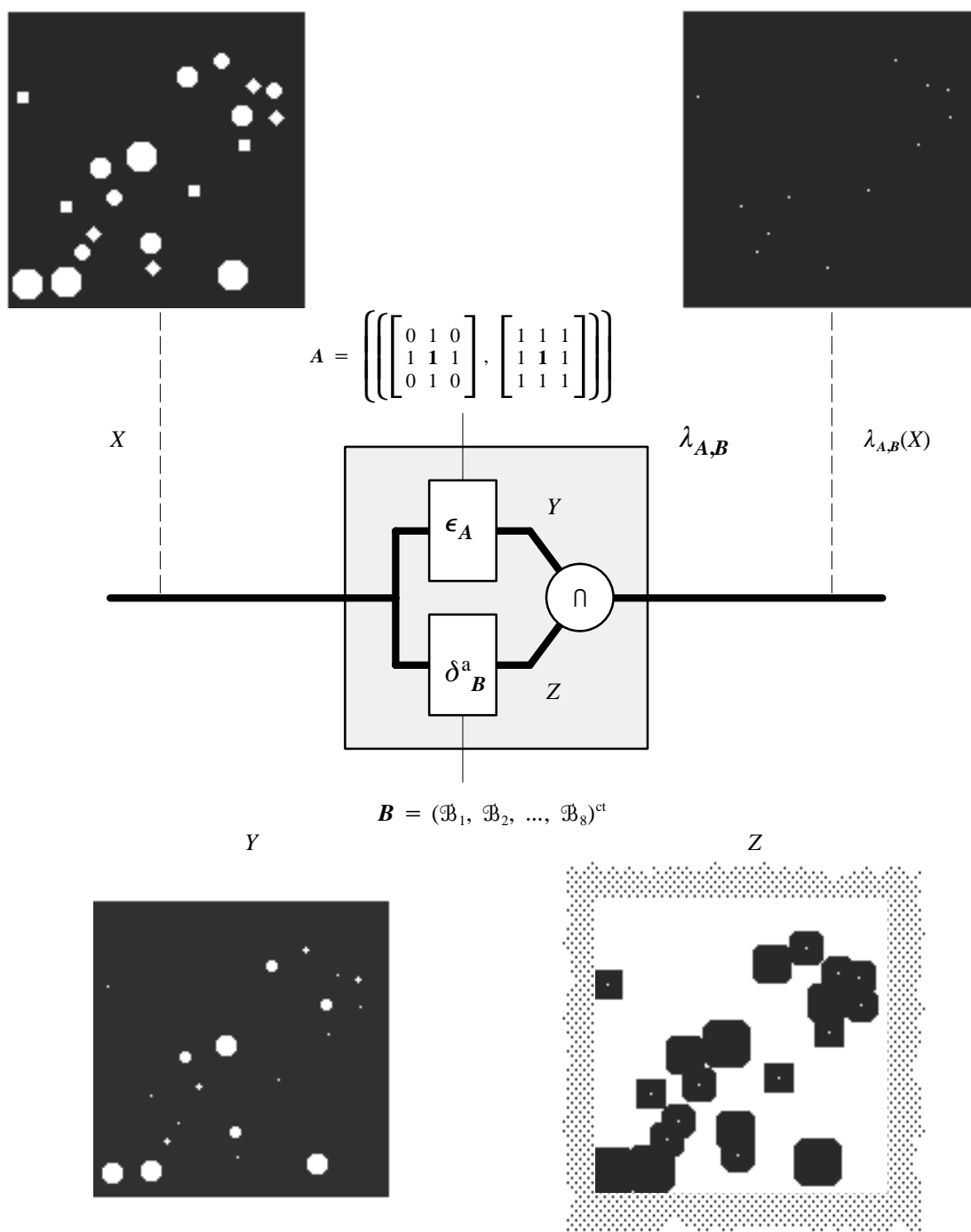


Fig. 9.16 – Reconhecimento genérico de forma com folga.

onde  $u_1 = \min \{x_1 \in [0, n_1 - 1] : (x_1, x_2) \in X\}$ .

Em outros termos, nessas condições,  $\lambda_{A,B}$  identifica o primeiro ponto da imagem  $X$  que encontramos percorrendo a imagem exaustivamente linha a linha, da esquerda para a direita e de cima para baixo, a partir da origem.

**Definição 9.6** (filtro  $n$ -fi-gama e filtro  $n$ -gama-fi) – Os operadores primitivos  $\theta$  e  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\theta = \phi_B^n \gamma_B^n \text{ e } \psi = \gamma_B^n \phi_B^n,$$

são chamados, respectivamente, de *filtro  $n$ - $\phi\gamma$*  e *filtro  $n$ - $\gamma\phi$* . □

As Figuras 9.17 e 9.18 ilustram a aplicação, respectivamente, do filtro  $n$ - $\phi\gamma$  e do filtro  $n$ - $\gamma\phi$  para a restauração da imagem do teclado de uma calculadora, corrompida com ruído aditivo e subtrativo. O operador  $\nu$  representa o agente que provoca a detereoração da imagem por ruído. Observe que o filtro  $n$ - $\phi\gamma$  elimina todo o ruído aditivo, enquanto o filtro  $n$ - $\gamma\phi$  elimina todo o ruído subtrativo. O efeito do filtro  $n$ - $\phi\gamma$  é melhor do que o efeito do filtro  $n$ - $\gamma\phi$ , porque a densidade do ruído aditivo é maior do que a densidade do ruído subtrativo.

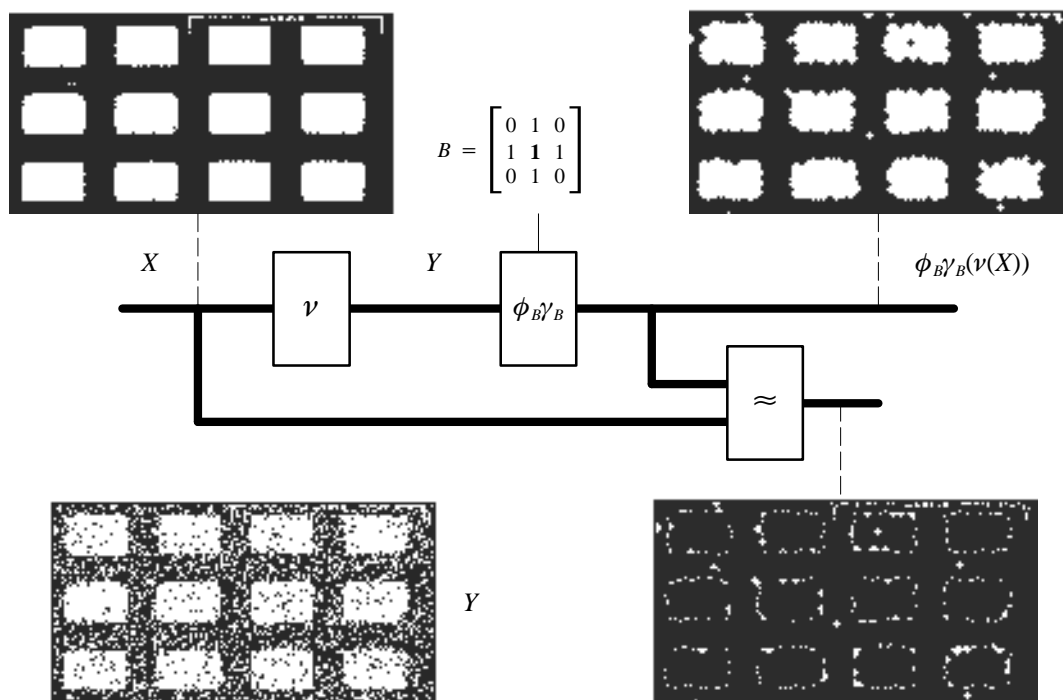


Fig. 9.17 – Restauração por um filtro fi-gama.

**Definição 9.7** (filtro  $n$ -gama-fi-gama e filtro  $n$ -fi-gama-fi) – Os operadores primitivos  $\theta$  e  $\psi$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes composições

$$\theta = \gamma_B^n \phi_B^n \gamma_B^n \text{ e } \psi = \phi_B^n \gamma_B^n \phi_B^n,$$

são chamados, respectivamente, de *filtro  $n$ - $\gamma\phi\gamma$*  e *filtro  $n$ - $\phi\gamma\phi$* . □

A Figura 9.19 apresenta uma aplicação do filtro  $n$ - $\phi\gamma$  e do filtro  $n$ - $\gamma\phi\gamma$  à uma mesma imagem. Observe que o filtro  $n$ - $\gamma\phi\gamma$  tende a fragmentar mais os objetos do que o filtro  $n$ - $\phi\gamma$ , devido a abertura adicional.

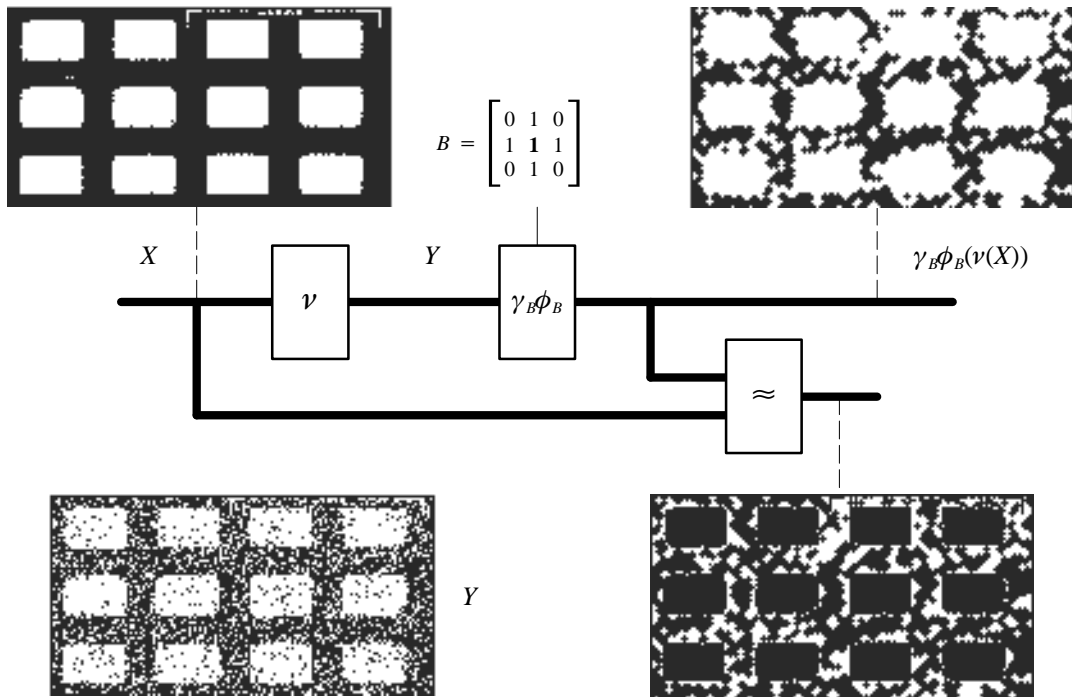


Fig. 9.18 – Restauração por um filtro gama-fi.

Vamos denotar os filtros  $n-\phi\gamma$ ,  $n-\gamma\phi$ ,  $n-\gamma\phi\gamma$  e  $n-\phi\gamma\phi$  por  $B$  genericamente por  $\psi_B^n$ . Seja  $\mathfrak{B}$  uma seqüência finita de  $N$  subconjuntos de  $E$ , com elementos  $B_i$  tais que  $B_i \subset B_{i+1}$ . O operador  $\psi_{\mathfrak{B}}^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\psi_{\mathfrak{B}}^N = \psi_{B_N}^N \psi_{B_{N-1}}^{N-1} \dots \psi_{B_1}^1,$$

é chamado um *filtro alternado sequencial de parâmetro  $\mathfrak{B}$* .

A Figura 9.20 apresenta a aplicação do filtro alternado sequencial  $\psi_{\mathfrak{B}}^3$  com  $\mathfrak{B} = (B, B, B)$  e  $B$  o losângulo (a cruz), construído a partir dos filtros  $n-\phi\gamma$ , para a restauração da imagem da calculadora corrompida por ruído, usada nas Figuras 9.17 e 9.18. Observe que este filtro produz objetos com bordas mais suaves do que as bordas dos respectivos objetos produzidos pelo filtro  $1-\phi\gamma$ .

A Figura 9.21 apresenta a aplicação do filtro  $3-\phi\gamma$  a mesma imagem da calculadora, observe que o efeito deste filtro sobre os objetos é muito mais devastador do que o efeito do correspondente filtro alternado sequencial.

Os operadores primitivos  $\psi_{\mathfrak{B}}$  e  $\omega_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  operações

$$\psi_{\mathfrak{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \epsilon_{B_i} \text{ e } \omega_{\mathfrak{B}} = \bigwedge_{i=1, \dots, n} \delta_{B_i},$$

são chamados, respectivamente, de *n-operador canônico isotônico* e *n-operador canônico dual isotônico de parâmetro  $\mathfrak{B}$* .

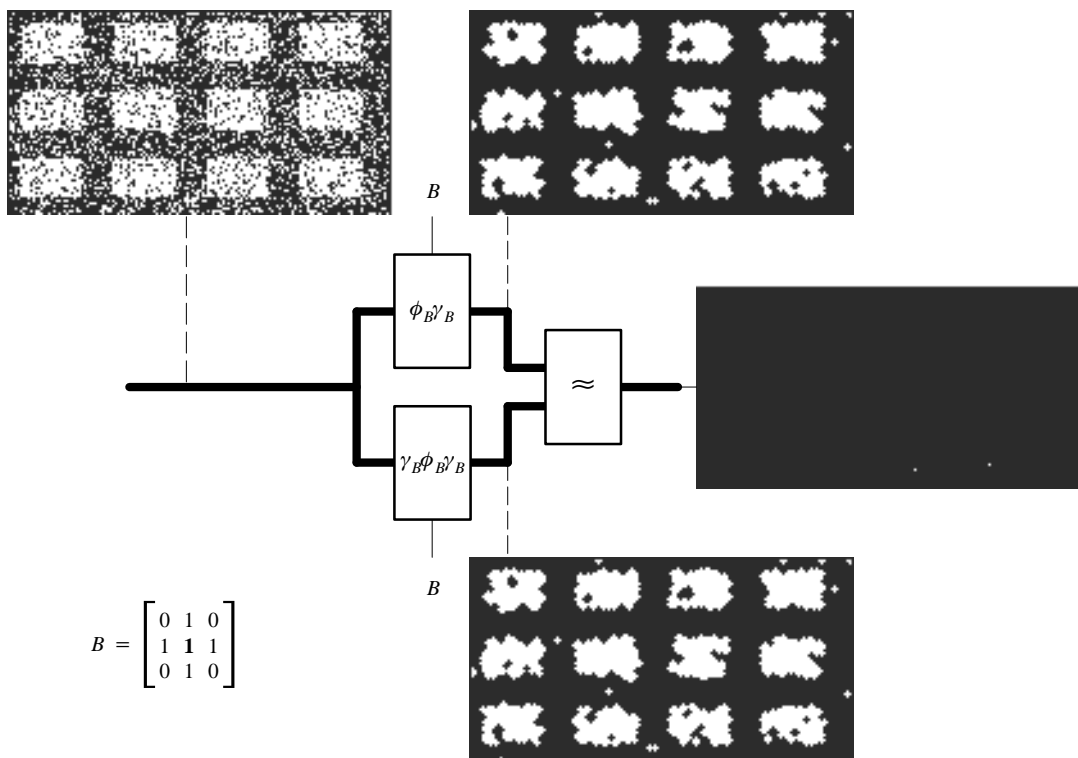


Fig. 9.19 – Comparação entre os filtros fi-gama e gama-fi-gama.

Seja  $B$  um elemento estruturante primitivo e  $n$  um número inteiro positivo tal que  $n \leq \#B$  (cardinalidade de  $B$ ). O operador  $\psi_{n,B}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado por

$$\psi_{n,B}(X) = \{x \in E : \#(X \cap (B^t + x)) \geq n\}$$

é chamado de *filtro de ordem  $n$  em relação a vizinhança  $B$* . Se  $\#B$  é um número ímpar e  $n = (\#B + 1)/2$ , então o operador  $\psi_{n,B}$  é chamado de *filtro da mediana em relação à vizinhança  $B$* .

O operador canônico isotônico parametrizado pela coleção de todos os subconjuntos de  $B$  que têm cardinalidade  $n$  é um filtro de ordem  $n$  em relação a vizinhança  $B$ .

A Figura 9.22 apresenta a aplicação do filtro da mediana para a restauração da imagem da calculadora corrompida por ruído, usada nas Figuras 9.17 e 9.18.

Os operadores primitivos  $\Gamma_{\mathfrak{B}}$  e  $\Phi_{\mathfrak{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  operações

$$\Gamma_{\mathfrak{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \gamma_{B_i} \text{ e } \Phi_{\mathfrak{B}} = \bigwedge_{i=1, \dots, n} \phi_{B_i},$$

são chamados, respectivamente, de  *$n$ -gerador de aberturas* e  *$n$ -gerador de fechamentos de parâmetro  $\mathfrak{B}$* .

A Figura 9.23 apresenta a aplicação da composição dos filtros  $n$ -gerador de aberturas e  $n$ -gerador de fechamentos para a restauração da imagem da calculadora corrompida por ruído, usada nas Figuras 9.17 e 9.18.

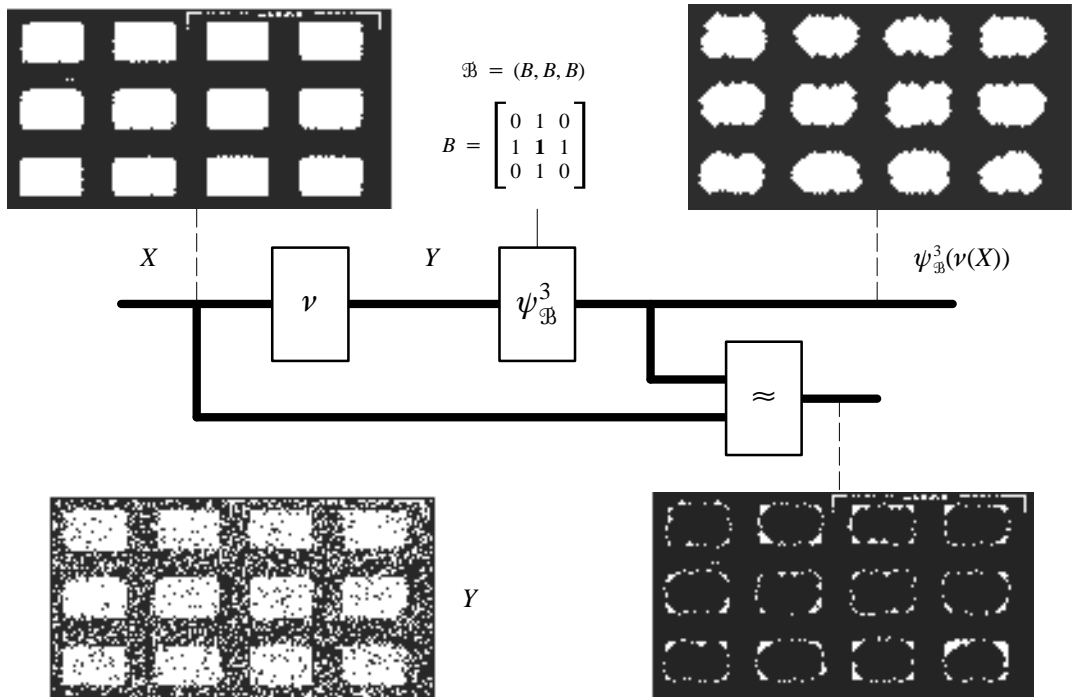


Fig. 9.20 – Restauração por um filtro alternado sequencial fi-gama.

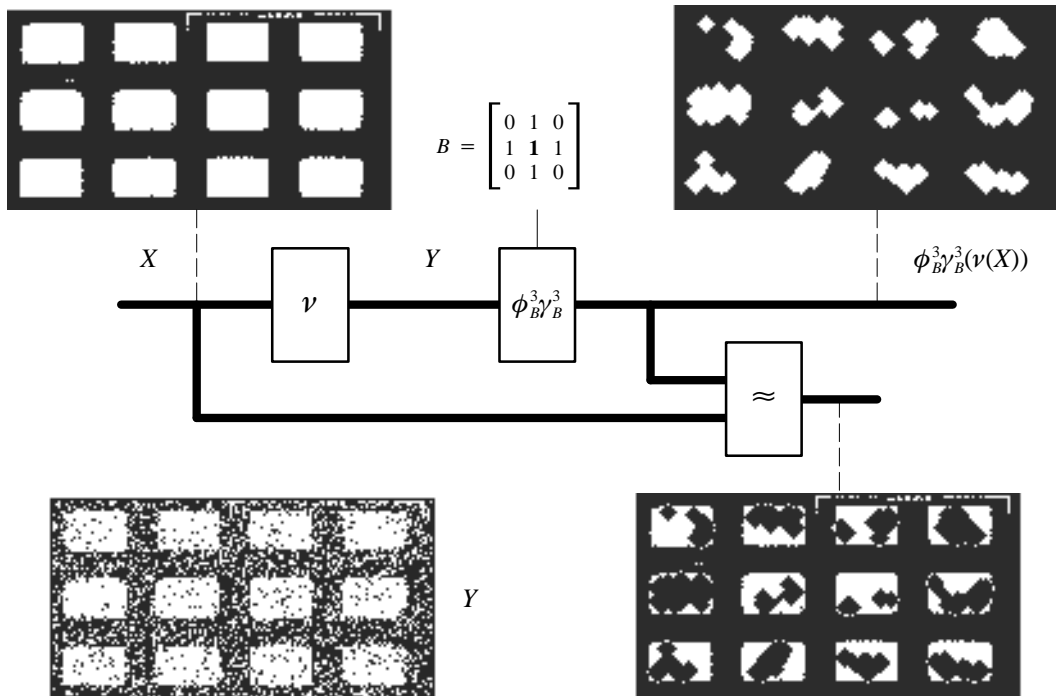


Fig. 9.21 – Restauração por um filtro 3-fi-gama.

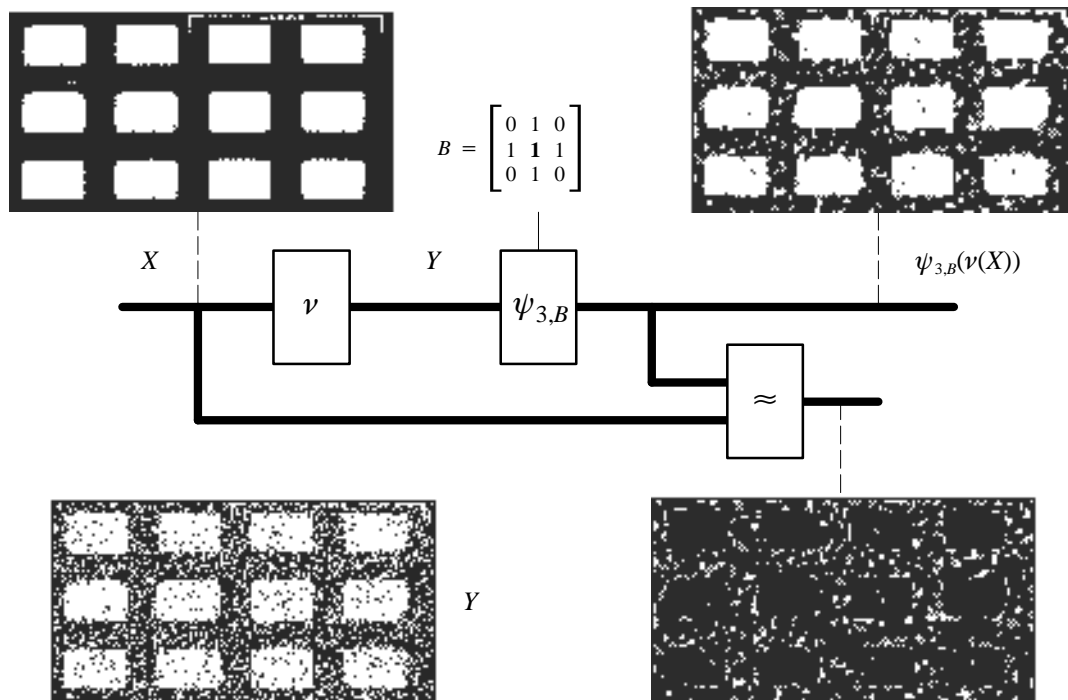


Fig. 9.22 – Restauração por um filtro da mediana.

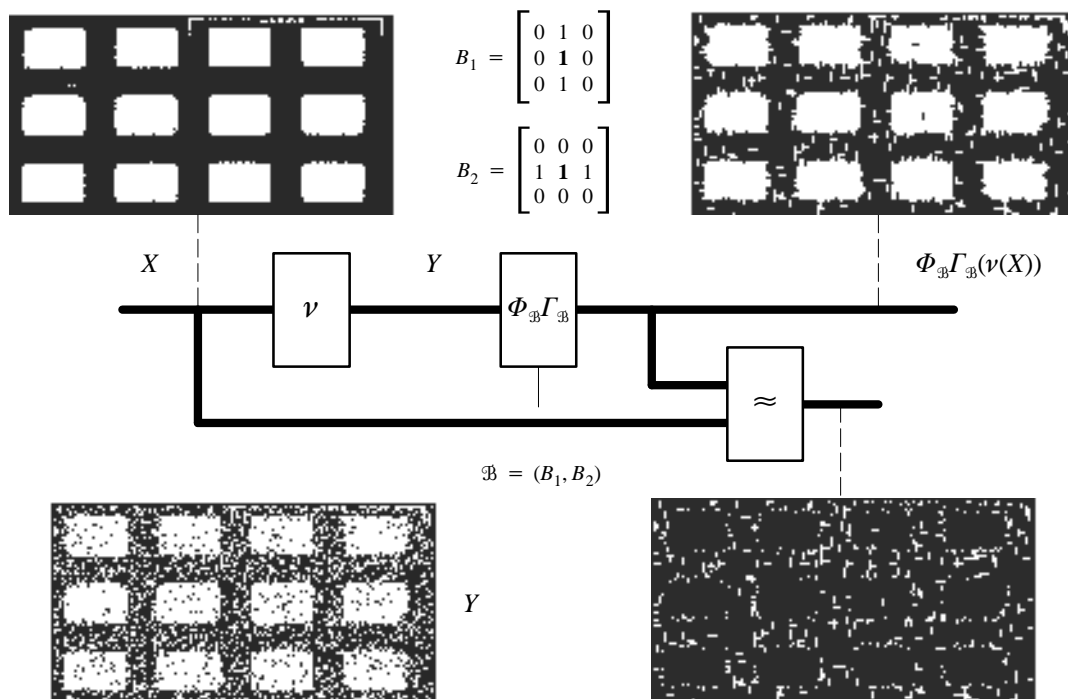


Fig. 9.23 – Restauração por um filtro FI-GAMA.

**Definição 9.8** (*n*-operador canônico e *n*-operador canônico dual) – Os operadores primitivos  $\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  e  $\omega_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  operações

$$\psi_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \bigvee_{i=1, \dots, n} \lambda_{A_i, B_i} \quad \text{e} \quad \omega_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \bigwedge_{i=1, \dots, n} \mu_{A_i, B_i},$$

são chamados, respectivamente, de *n*-operador canônico e *n*-operador canônico dual de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ . □

As Figuras 9.24 e 9.25 apresentam a aplicação do operador *n*-canônico, respectivamente, para a extração dos pontos extremos da imagem de um circuito eletrônico e para a extração, em particular, dos pontos triplos de um mapa da América do Sul. Em ambos os casos, as sequências  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  foram geradas a partir de rotações sucessivas, de 45 graus cada uma, de um dado padrão primitivo  $[A, B]$ .

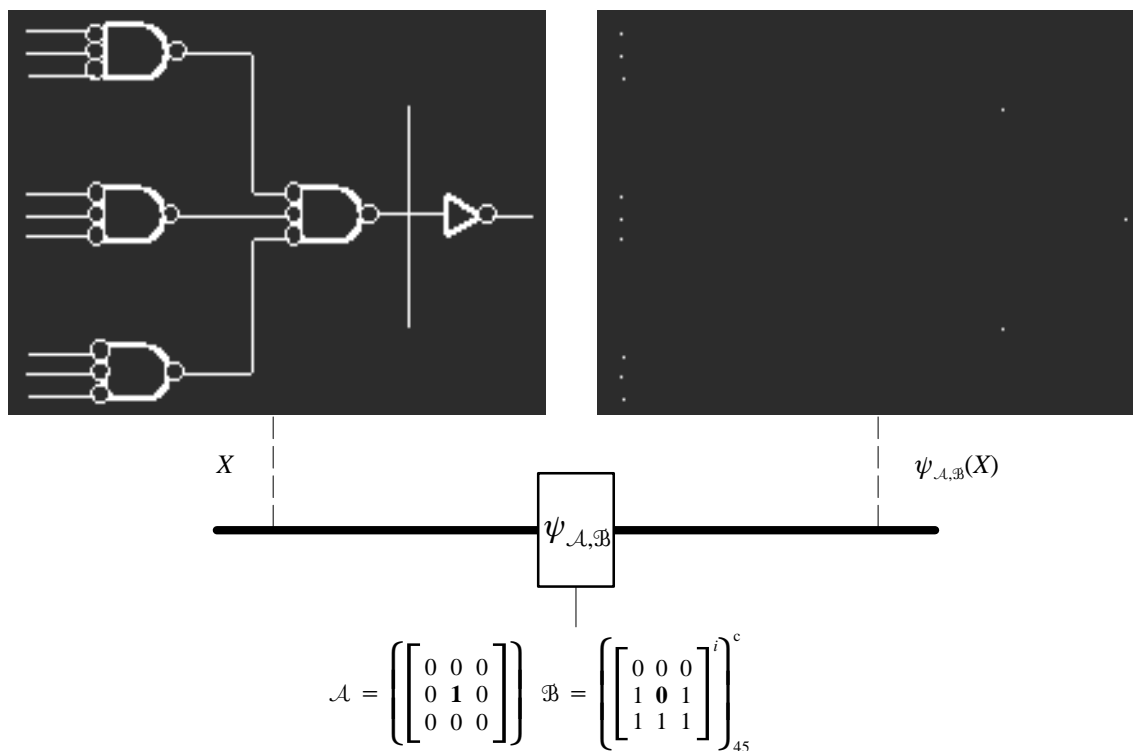


Fig. 9.24 – Identificação de pontos extremos.

**Definição 9.9** (*n*-afinamento e *n*-espessamento) – Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas sequências finitas de  $n$  subconjuntos em  $E$ , respectivamente, com elementos  $A_i$  e  $B_i$  tais que  $A_i \subset B_i$ . Os operadores  $\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^n$  e  $\tau_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  composições

$$\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^n = \sigma_{A_1, B_2} \cdots \sigma_{A_n, B_n} \quad \text{e} \quad \tau_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^n = \tau_{A_1, B_2} \cdots \tau_{A_n, B_n},$$

são chamados, respectivamente, de *n*-afinamento e *n*-espessamento de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ . □

É importante observar que, se cada um dos afinamentos ou espessamentos de uma sequência, respectivamente, de afinamentos ou espessamentos não alterar a homotopia da imagem que recebeu como entrada, então o *n*-afinamento ou o *n*-espessamento produzirá transformações que conservam a homotopia das imagens.

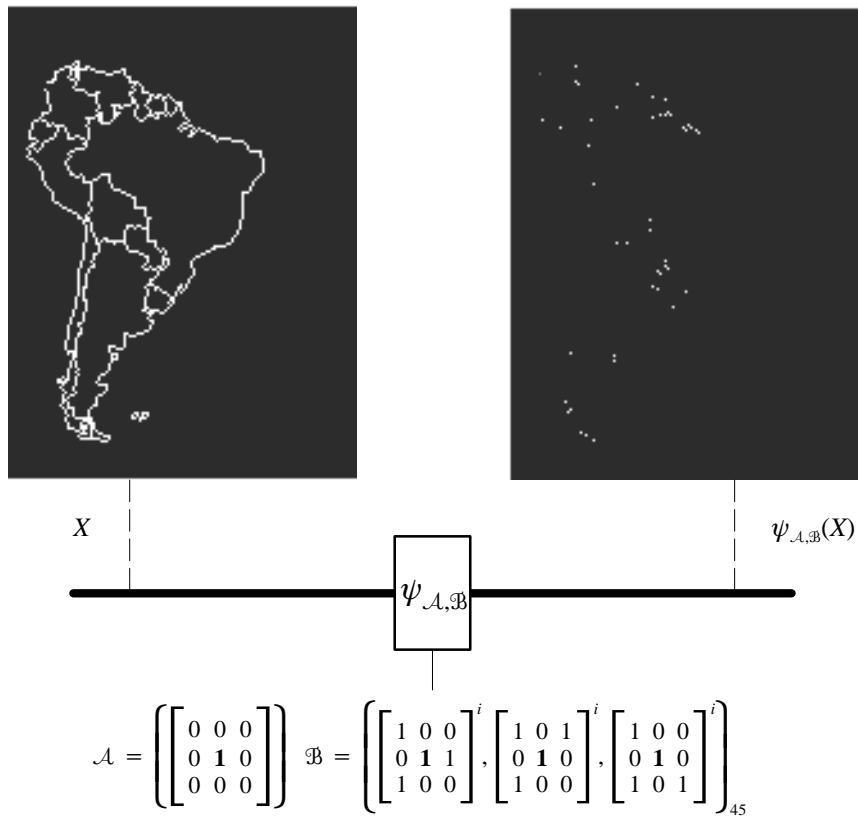


Fig. 9.25 – Identificação de pontos triplos.

As Figuras 9.26 e 9.27 ilustram a aplicação de operadores de  $n$ -afinamento. A primeira figura apresenta afinamentos homotópicos, que desgastam os objetos paulatinamente a partir das bordas. A segunda figura mostra afinamentos não homotópicos, que têm o efeito de reduzir o comprimento de objetos finos, desgastando-os paulatinamente a partir das pontas. A Figura 9.28 ilustra a aplicação de um operador de  $n$ -espessamento homotópico. Em todos esses exemplos, as seqüências de elementos estruturantes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  foram geradas por rotações sequenciais, de 45 cada uma, de um de um dado padrão primitivo  $[A, B]$ .

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas seqüências finitas de  $n$  subconjuntos em  $E$ , respectivamente, com elementos  $A_i$  e  $B_i$  tais que  $A_i \subset B_i$ . Os operadores  $\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}^n$  e  $\tau_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pelas seguintes  $n - 1$  composições

$$\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}^n = \sigma_{A_1,B_1,Y} \cdots \sigma_{A_n,B_n,Y} \quad \text{e} \quad \tau_{\mathcal{A},\mathcal{B},Y}^n = \tau_{A_1,B_1,Y} \cdots \tau_{A_n,B_n,Y}$$

são chamados, respectivamente, de  $n$ -afinamento condicional e  $n$ -espessamento condicional de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , e dado a máscara  $Y$ .

A Figura 9.29 ilustra a aplicação do  $n$ -espessamento condicional. Observe que os espessamentos condicionais ficam restritos aos objetos da máscara. Nesse exemplo, as seqüências  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  foram construídas por rotações sucessivas, de 45 graus cada uma, de um dado padrão  $[A, B]$ .

**Exercício 9.2** (Caixa de Ferramentas da MM) – Implemente os programas do nível 2 na forma de workspaces do sistema KHOROS, usando os “glyphs” do módulo “tools”, e dos níveis básico e 1 da “MMach toolbox”. □



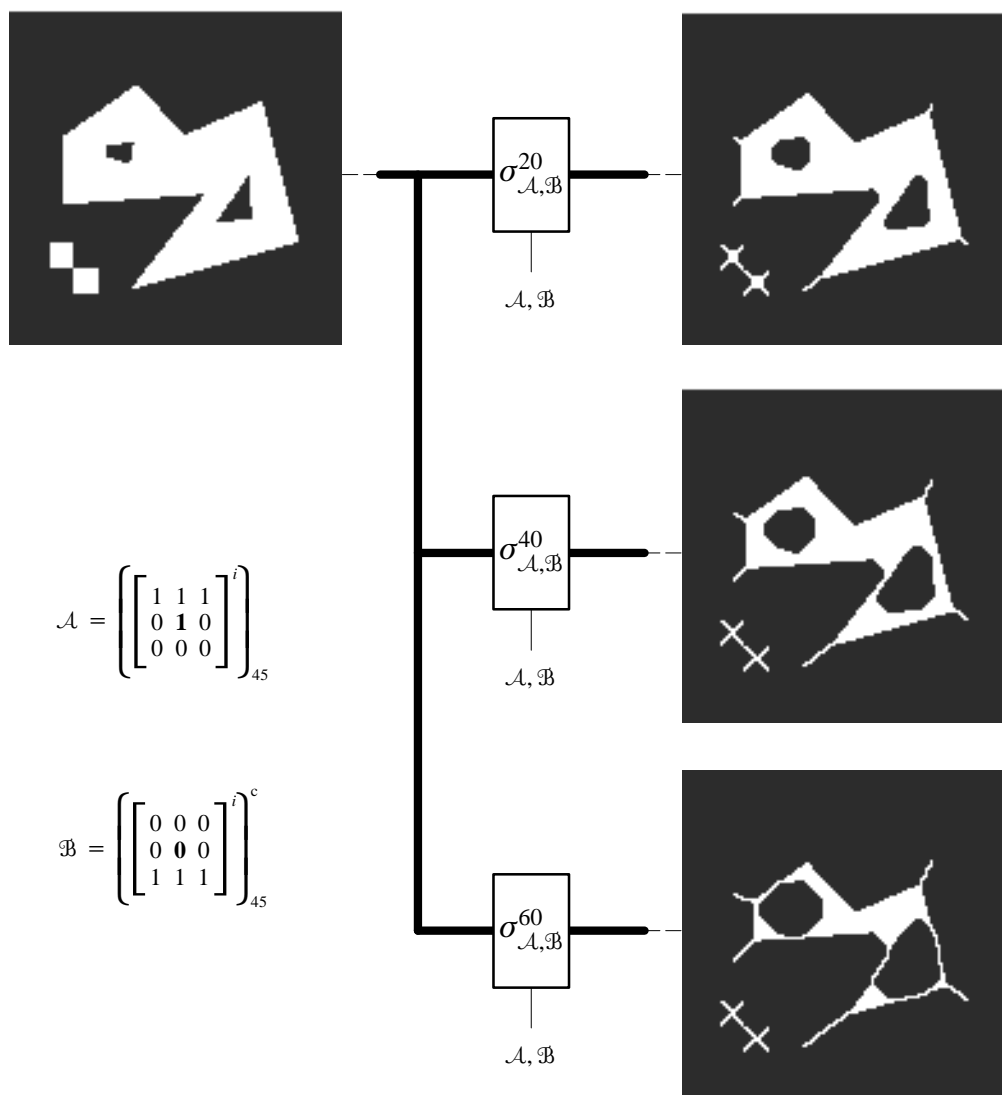


Fig. 9.26 – Sequência de afinamentos homotópicos.

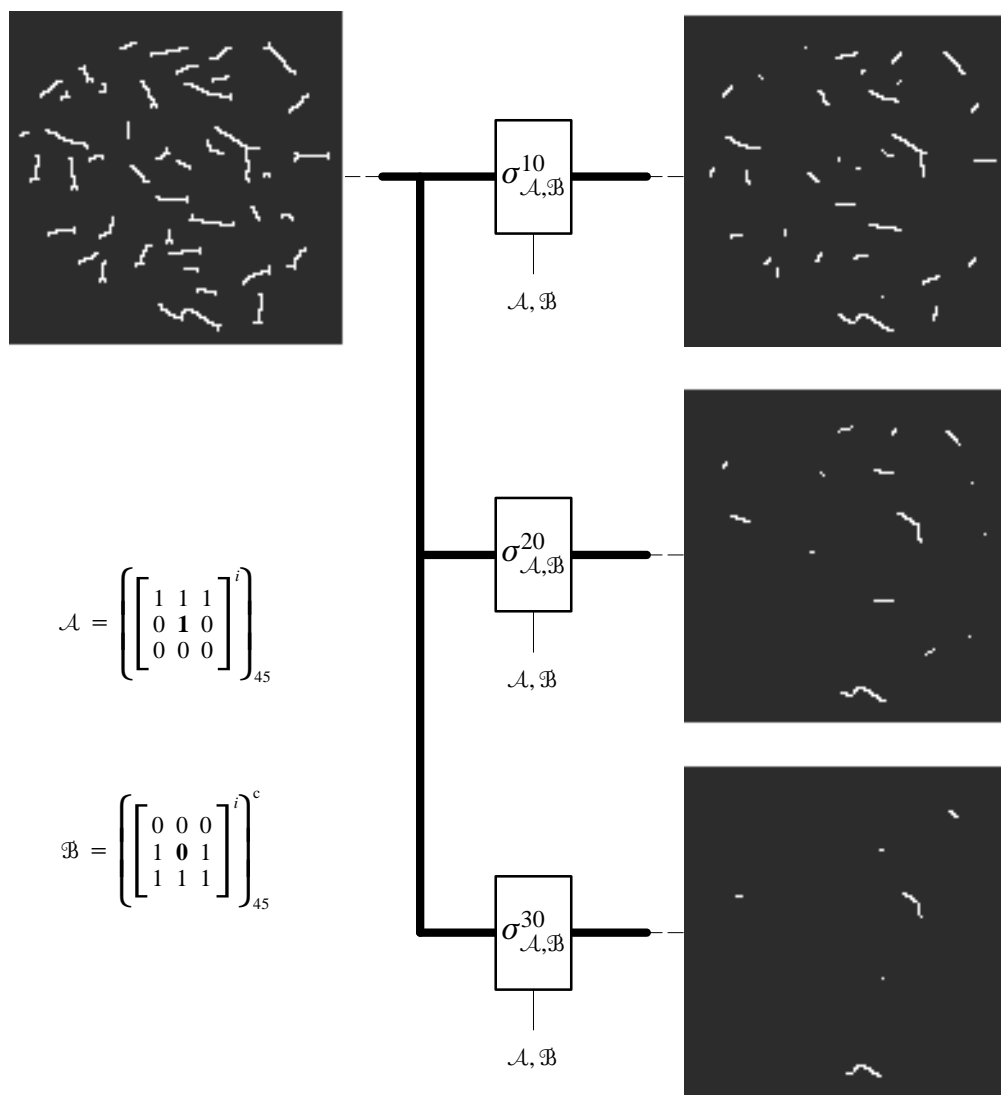


Fig. 9.27 – Sequência de afinamentos não homotópicos.

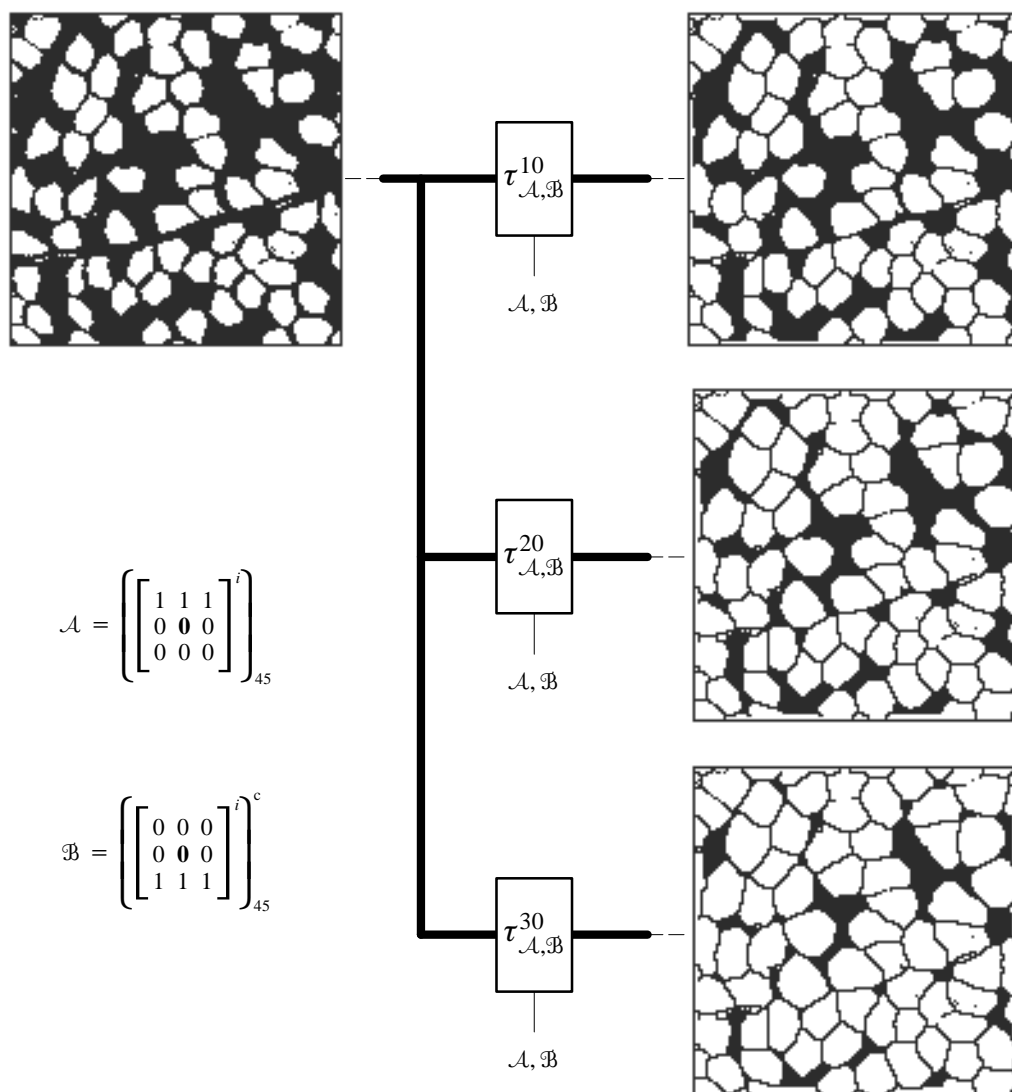


Fig. 9.28 – Sequência de espessamentos homotópicos.

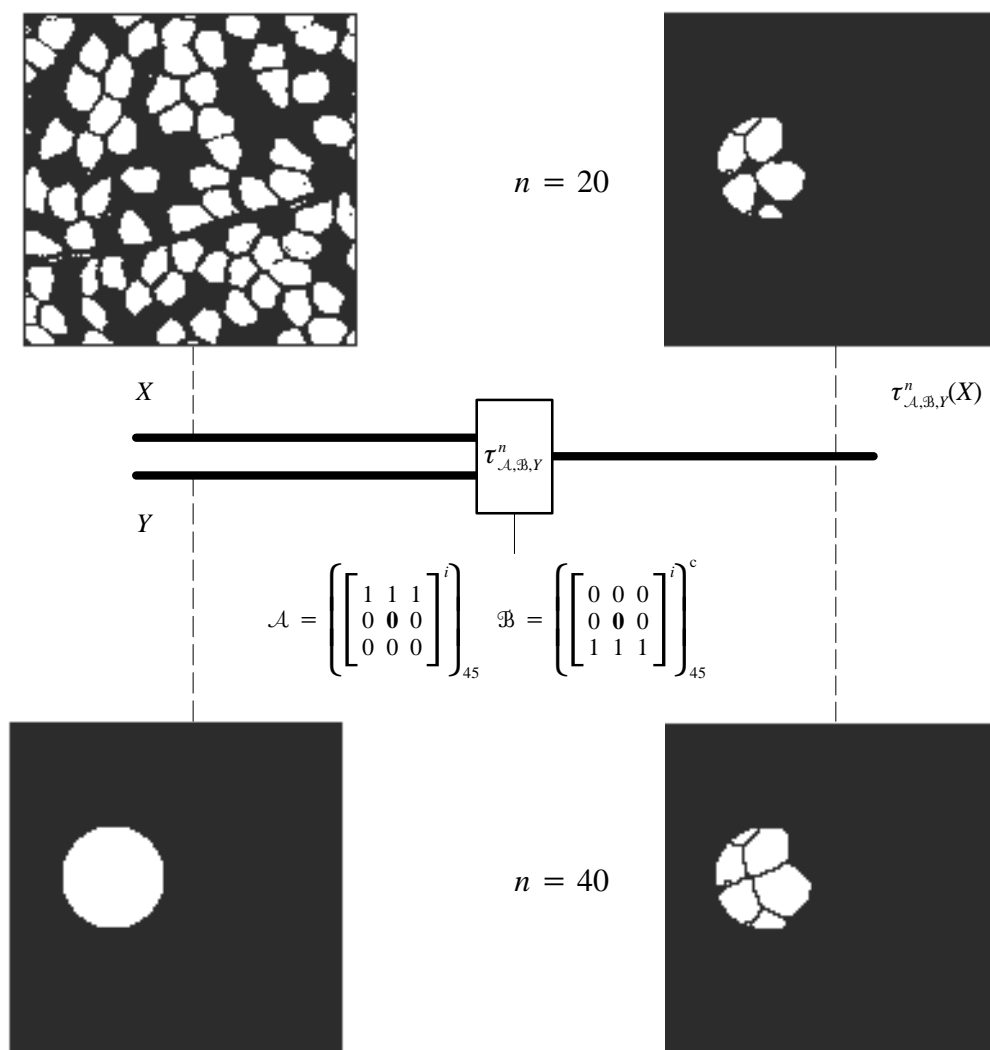


Fig. 9.29 – Sequência de espessamentos condicionais.

### 9.3 Programas de nível 3

Os programas do nível 3 são construídos usando um número “a priori” indefinido de vezes pelo menos um programa do nível básico.

O operador primitivo  $\beta_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\beta_B = (\iota \wedge \phi_B \gamma_B \phi_B) \vee \gamma_B \phi_B \gamma_B,$$

é chamado de *primitiva do filtro do centro*.

**Definição 9.10** (filtro do centro) – O operador primitivo  $\alpha_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte sucessão infinita de composições

$$\alpha_B = \beta_B \beta_B \dots \beta_B \dots$$

é chamada de *filtro do centro*. □

A Figura 9.30 ilustra a aplicação do filtro do centro para a restauração da imagem da calculadora corrompida por ruído. Esta imagem é a mesma usada em exemplos anteriores.

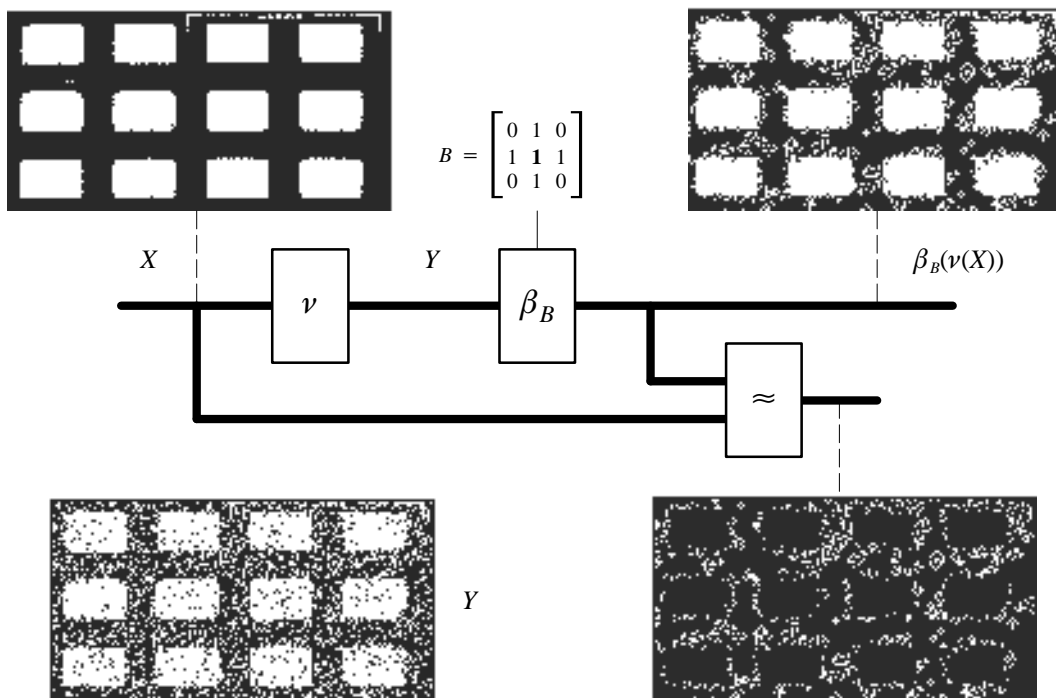


Fig. 9.30 – Restauração por um filtro do centro.

Outros exemplos de programas de nível 3 são as *aberturas e fechamentos por reconstrução por um elemento estruturante dado um marcador* (ver Seção 7.1).

As Figuras 9.31, 9.32, 9.33 e 9.34 ilustram a aplicação da abertura por reconstrução.

O marcador que aparece na Figura 9.31 é o primeiro ponto da imagem a partir da origem. A aplicação sucessiva do operador que extrai o primeiro ponto da imagem e da reconstrução por abertura, conforme apresentado no exemplo, permite extrair objeto a objeto da imagem. Este procedimento, chamado de *rotulação*, é muito importante em análise de imagens, pois permite tratar individualmente cada objeto da imagem.

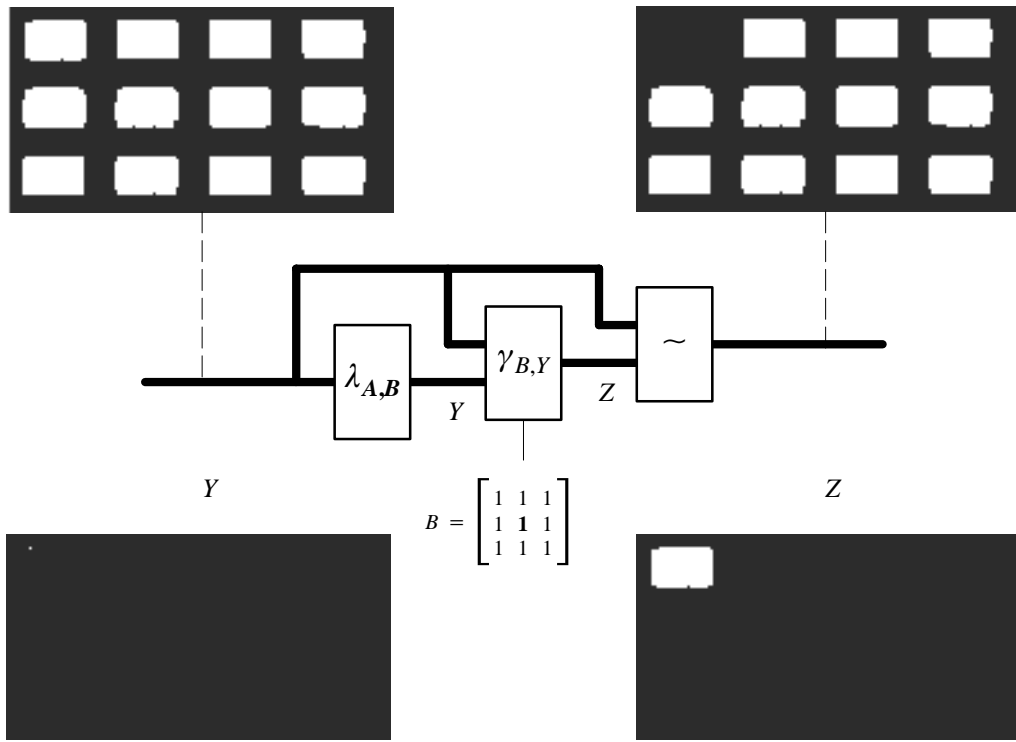


Fig. 9.31 – Rotulação.

O marcador que aparece na Figura 9.32 é a moldura do retângulo  $E$ . A aplicação da abertura por reconstrução com esse marcador particular é muito importante em análise de imagens, pois permite identificar os objetos da imagem que são parcialmente observados e, portanto, são afetados pelos operadores de uma forma diferenciada dos demais objetos.

O marcador que aparece na Figura 9.33 é a abertura da imagem original. A abertura por reconstrução com esse marcador particular tem um efeito de eliminação de objetos pequenos, da mesma forma que a abertura morfológica, e não deformação dos objetos grandes, de forma distinta da abertura morfológica.

A Figura 9.34 ilustra o uso da abertura por reconstrução para eliminar os buracos dos objetos da imagem. É interessante observar, que o operador usado nesse exemplo é dual do operador que extrai os objetos parcialmente observados.

**Definição 9.11** (esqueleto por afinamento e exoesqueleto por espessamento) – Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas sequências infinitas de elementos estruturantes primitivos, respectivamente, com elementos  $A_i$  e  $B_i$  tais que  $A_i \subset B_i$ . Os operadores  $\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$  e  $\tau_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ , sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pela seguinte sucessão infinita de composições

$$\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \sigma_{A_1,B_1} \cdots \sigma_{A_i,B_i} \cdots \quad \text{e} \quad \tau_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \tau_{A_1,B_1} \cdots \tau_{A_i,B_i} \cdots$$

são chamados, respectivamente, de *esqueleto por afinamento e exoesqueleto por espessamento de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$* . □

As sequências  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  que parametrizam o esqueleto por afinamento e o exoesqueleto por espessamento, usualmente, são equivalentes às rotações sucessivas de um padrão.

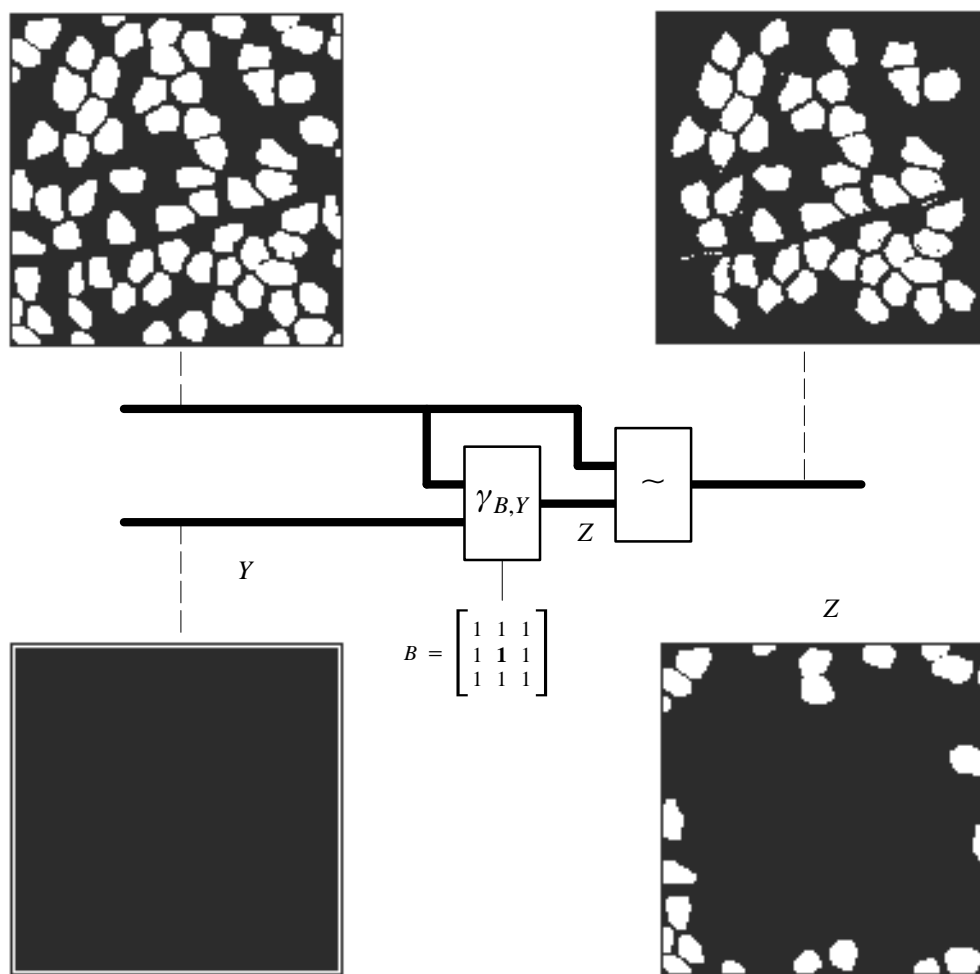


Fig. 9.32 – Eliminação dos objetos que tocam as bordas.

A Figura 9.35 ilustra a aplicação do esqueleto por afinamento. Observamos que os esqueletos em (a), (c) e (d) são homotópicos, enquanto os esqueletos em (b) e (e) não são homotópicos. Notamos também que o incremento de rotação (45–90) tem influência no fato do esqueleto ser homotópico ou não. Por exemplo, em (b), que é um esqueleto não homotópico, e em (c), que é um esqueleto homotópico, temos como parâmetro o mesmo padrão, porém um incremento de rotação diferente.

A Figura 9.36 apresenta a aplicação de um esqueleto homotópico a imagem de um conjunto de letras.

A Figura 9.37 ilustra a aplicação do exoesqueleto por espessamento. Observamos que nenhum desses exoesqueletos é homotópico, devido ao espessamento da moldura da imagem, ocorrido porque a erosão e a anti-dilatação usadas terem sido implementadas como transformações condicionalmente invariantes por translação.

Em alguns casos, a composição de dois esqueletos pode levar a esqueletos com propriedades mais interessantes. A Figura 9.38 apresenta a aplicação da composição de dois esqueletos por afinamento à imagem das letras.

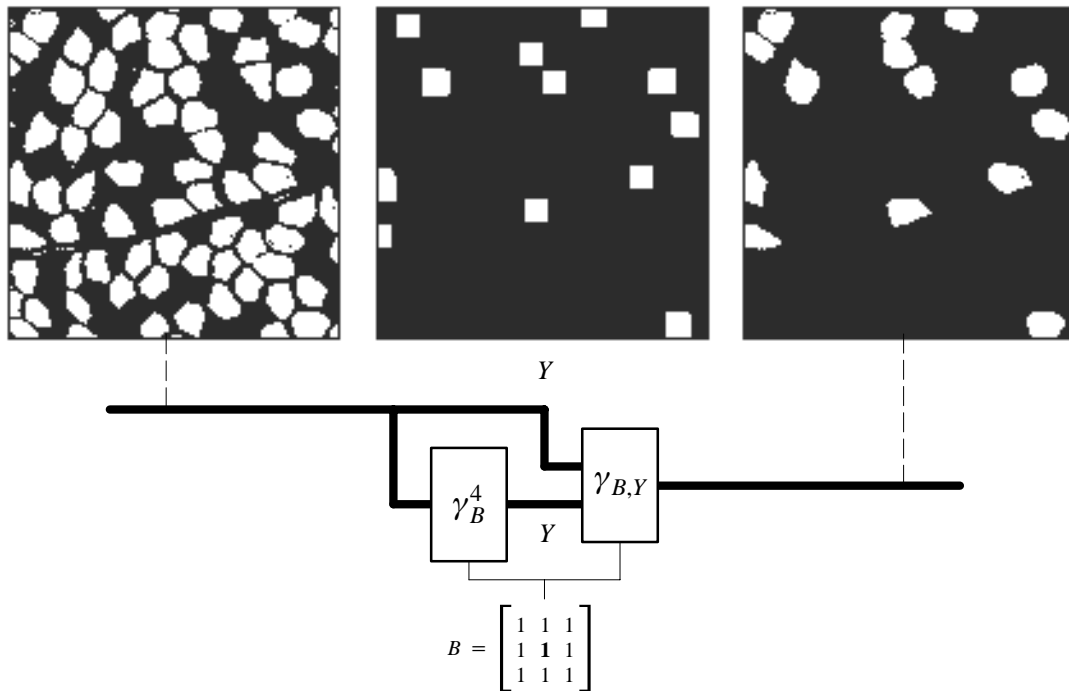


Fig. 9.33 – Filtragem de objetos pequenos.

Uma outra composição de esqueletos interessante é um esqueleto homotópico, seguido de um esqueleto que “come” as pontas soltas de imagens finas. Esta composição de esqueletos aparece, por exemplo, no operador conhecido como *SKIZ*, que cria uma partição do domínio de definição das imagens a partir de uma imagem de referência. Para cada componente conexa da imagem de referência, existirá um gomo correspondente da partição, que será chamado *zona de influência da componente conexa*.

A Figura 9.39 ilustra a aplicação do *SKIZ* à imagem das células. A união com a moldura da imagem garante que as pontas do esqueleto que tocam a moldura não sejam eliminadas.

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  elementos estruturantes primitivos. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  seqüências infinitas de elementos estruturantes primitivos, respectivamente, com elementos  $A_i, B_i, C_i$  e  $D_i$ , tais que  $A_i = A^i, B_i = B^i, C_i = C^i, D_i = D^i, A \subset B$  e  $C \subset D$ , e com índice  $i = 0, 90, 180, 270, \dots$ . O operador  $\sigma_{A,B,C,D}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte sucessão infinita de composições

$$\sigma_{A,B,C,D} = (\sigma_{A_0,B_0} \wedge \sigma_{A_{90},B_{90}} \wedge \sigma_{C_0,D_0}) \dots (\sigma_{A_i,B_i} \wedge \sigma_{A_{i+90},B_{i+90}} \wedge \sigma_{C_i,D_i}) \dots$$

é chamado *esqueleto por afinamento filtrado de parâmetros  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$* .

A Figura 9.40 apresenta uma aplicação do esqueleto por afinamento filtrado à imagem das letras. Comparando este resultado com os das Figuras 9.36 e 9.38, observamos que este esqueleto homotópico é menos ruidoso do que os outros esqueletos homotópicos apresentados. De fato, Jang e Chin [JanChi90] analisaram teoricamente o esqueleto por afinamento filtrado, com os parâmetros fixados na Figura 9.40, e provaram que ele é sempre formado de curvas simples.



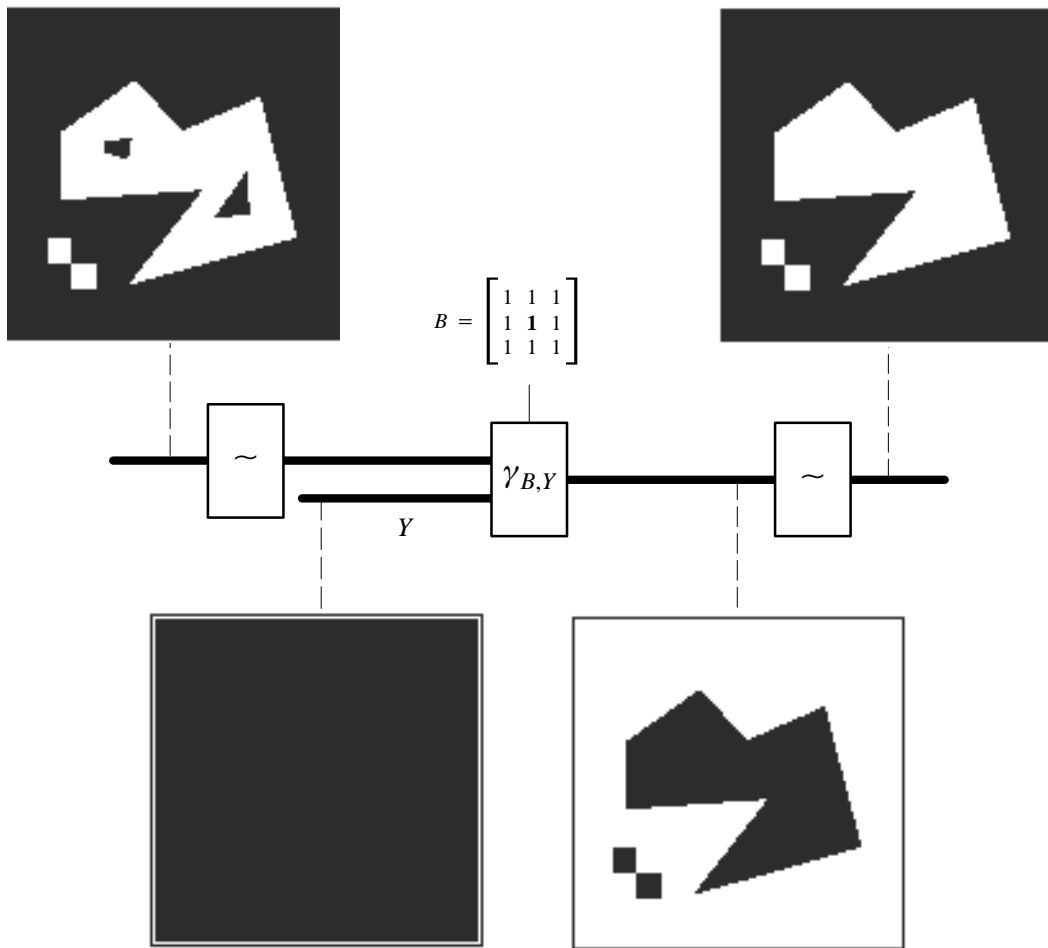


Fig. 9.34 – Fechamento de buracos.

**Definição 9.12** (esqueleto condicional por afinamento e exoesqueleto condicional por espessamento) – Seja  $Y$  um elemento de  $\mathcal{P}(E)$ , os operadores  $\sigma_{\mathcal{A},\mathfrak{B},Y}$  e  $\tau_{\mathcal{A},\mathfrak{B},Y}$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dados pela seguinte susseção infinita de composições

$$\sigma_{\mathcal{A},\mathfrak{B},Y} = \sigma_{A_0,B_0,Y} \dots \sigma_{A_i,B_i,Y} \dots \quad \text{e} \quad \tau_{\mathcal{A},\mathfrak{B},Y} = \tau_{A_0,B_0,Y} \dots \tau_{A_i,B_i,Y} \dots,$$

são chamados, respectivamente, de *esqueleto condicional (ou geodésico) por afinamento* e *exoesqueleto condicional (ou geodésico) por espessamento de parâmetros  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{B}$ , dado  $Y$* .  $\square$

Uma aplicação usual do exoesqueleto condicional por espessamento homotópico é para a segmentação de objetos superpostos, um problema típico em análise de imagens citológicas ou industriais. A Figura 9.41 ilustra o efeito de separação de dois discos.

A aplicação simples do operador acima pode distorcer consideravelmente a curva de separação dos objetos. Um artifício que pode-se empregar para suavizar este efeito é aplicar este exoesqueleto sucessivamente a  $i$ -erosão da imagem original, com  $i$  tomando valores decrescentes de  $n$  até 1. A Figura 9.42 apresenta algumas iterações do espeçamento condicional suave. É interessante comparar os resultados das Figuras 9.41 e 9.42.

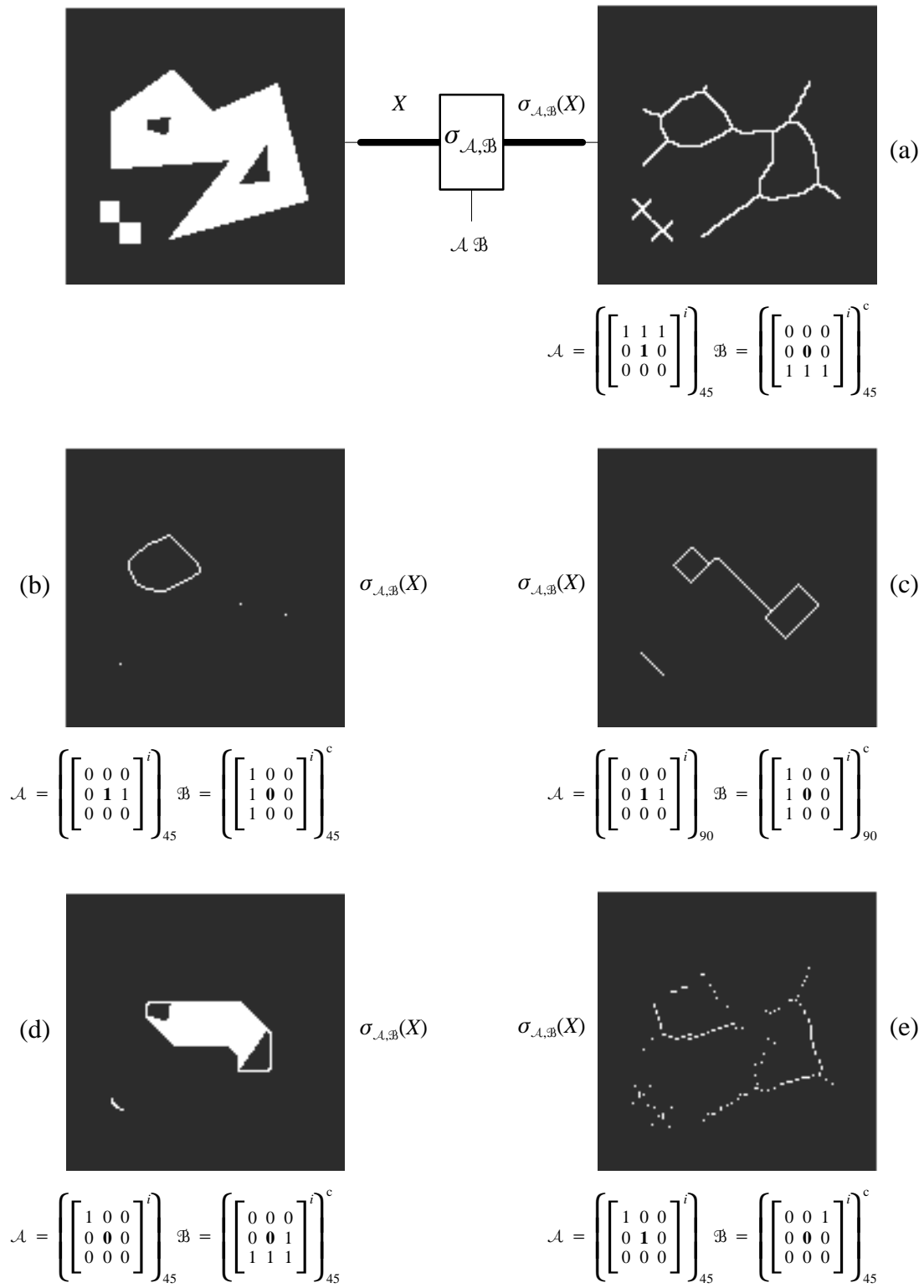


Fig. 9.35 – Esqueletos por afinamento.

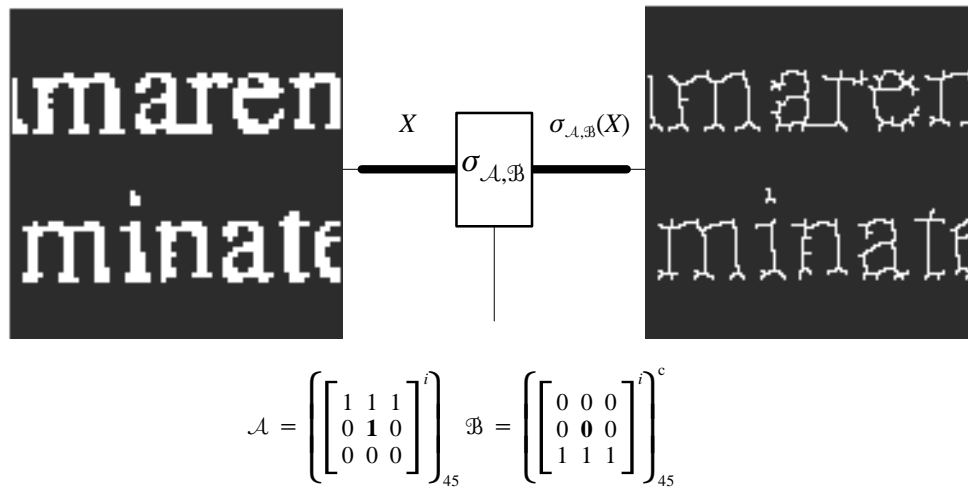


Fig. 9.36 – Esqueleto por afinamento.

**Definição 9.13** (erosão última) – O operador primitivo  $\rho_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\rho_B = \bigvee_{i=0,1,\dots} \epsilon_B^i \sim \gamma_{B, \epsilon_B^{i+1}} \epsilon_B^i,$$

é chamado de *erosão última de parâmetro B*. □

A Figura 9.43 apresenta a construção da erosão última.

**Definição 9.14** (bissetor condicional de orden  $n$ ) – O operador primitivo  $\beta_B^n$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\beta_B^n = \bigvee_{i=0,1,\dots} \epsilon_B^i \sim \delta_{B, \epsilon_B^i}^n \epsilon_B^{i+1},$$

é chamado *bissetor condicional de orden  $n$  e de parâmetro B*. □

A Figura 9.44 apresenta a construção do bissetor condicional.

**Definição 9.15** (esqueleto morfológico) – O operador primitivo  $\sigma_B$  sobre  $\mathcal{P}(E)$ , dado pela seguinte composição

$$\sigma_B = \bigvee_{i=0,1,\dots} \epsilon_B^i \sim \gamma_B \epsilon_B^i,$$

é chamado *esqueleto morfológico de parâmetro B*. □

A Figura 9.45 apresenta a construção do esqueleto morfológico.

Os operadores de erosão última, bissetor condicional e esqueleto morfológico, em muitos casos, são empregados para produzir marcadores que identificam objetos superpostos. De fato, o bissetor condicional é um operador intermediário entre a erosão última e o esqueleto morfológico, dependendo da escolha do parâmetro  $n$  ele se aproxima mais de um ou de outro. Para  $n = 0$ , o bissetor condicional será o próprio esqueleto morfológico. Para valores de  $n$  acima de um certo valor mínimo, o bissetor condicional será a própria erosão última.

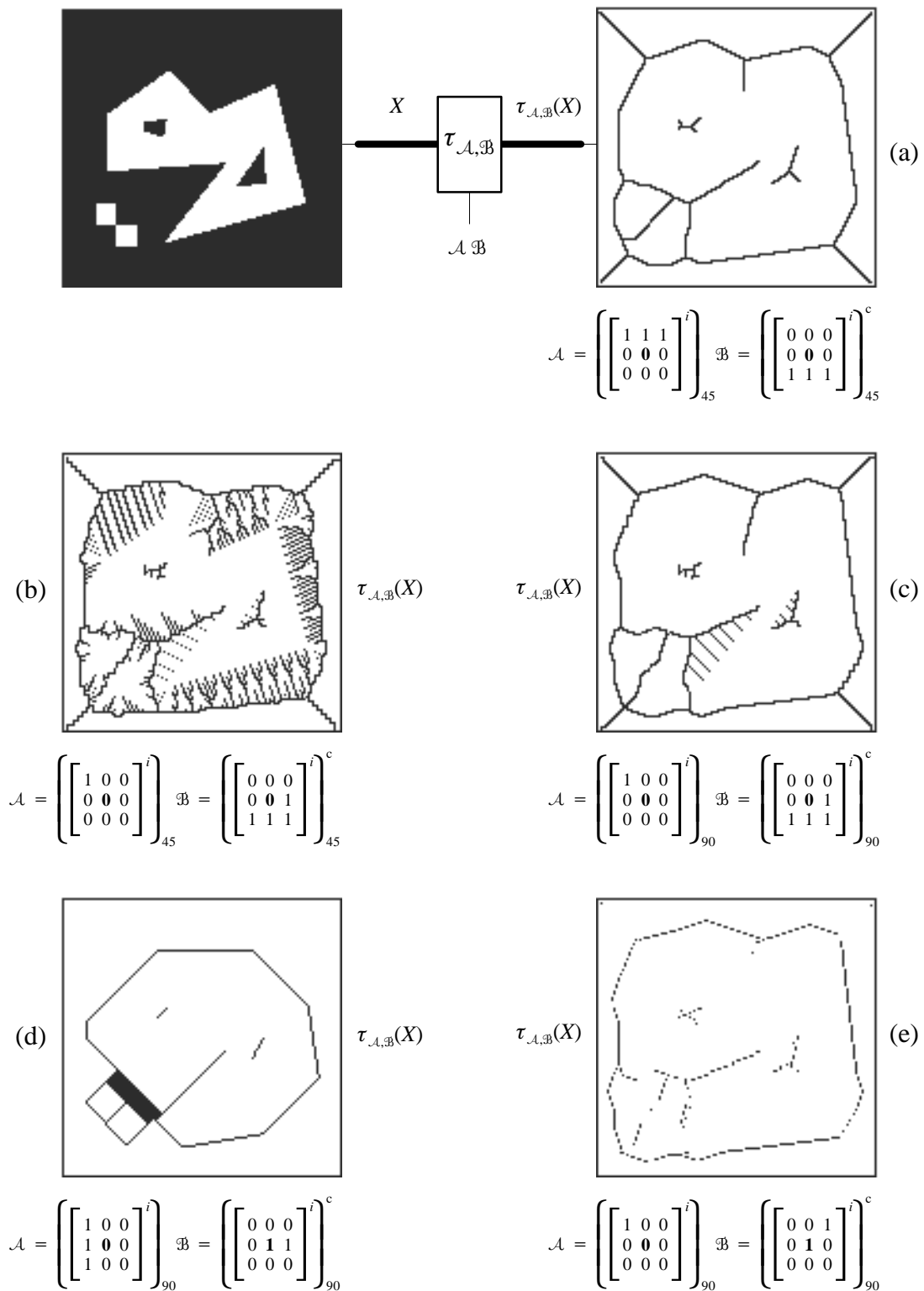


Fig. 9.37 – Exoesqueletos por espessamento.

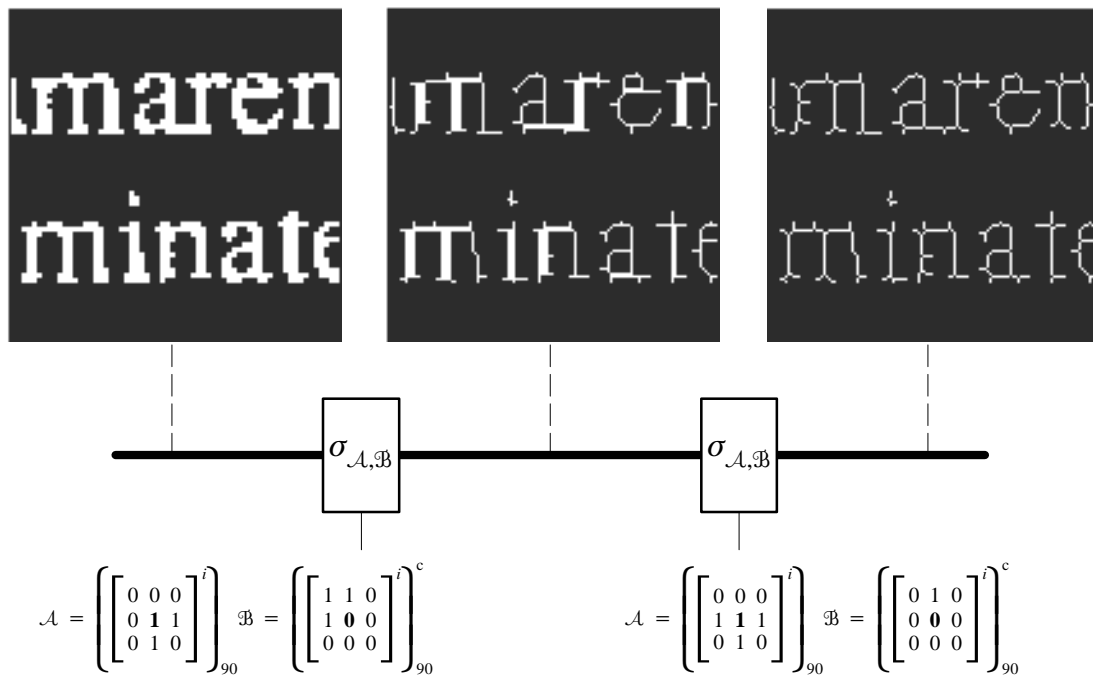


Fig. 9.38 – Composição de esqueletos por afinamento.

**Exercício 9.3** (Caixa de Ferramentas da MM) – Implemente os programas do nível 3 na forma de workspaces do sistema KHOROS, usando os “glyphs” do módulo “tools” e dos níveis básico, 1 e 2 da “MMach toolbox”. □

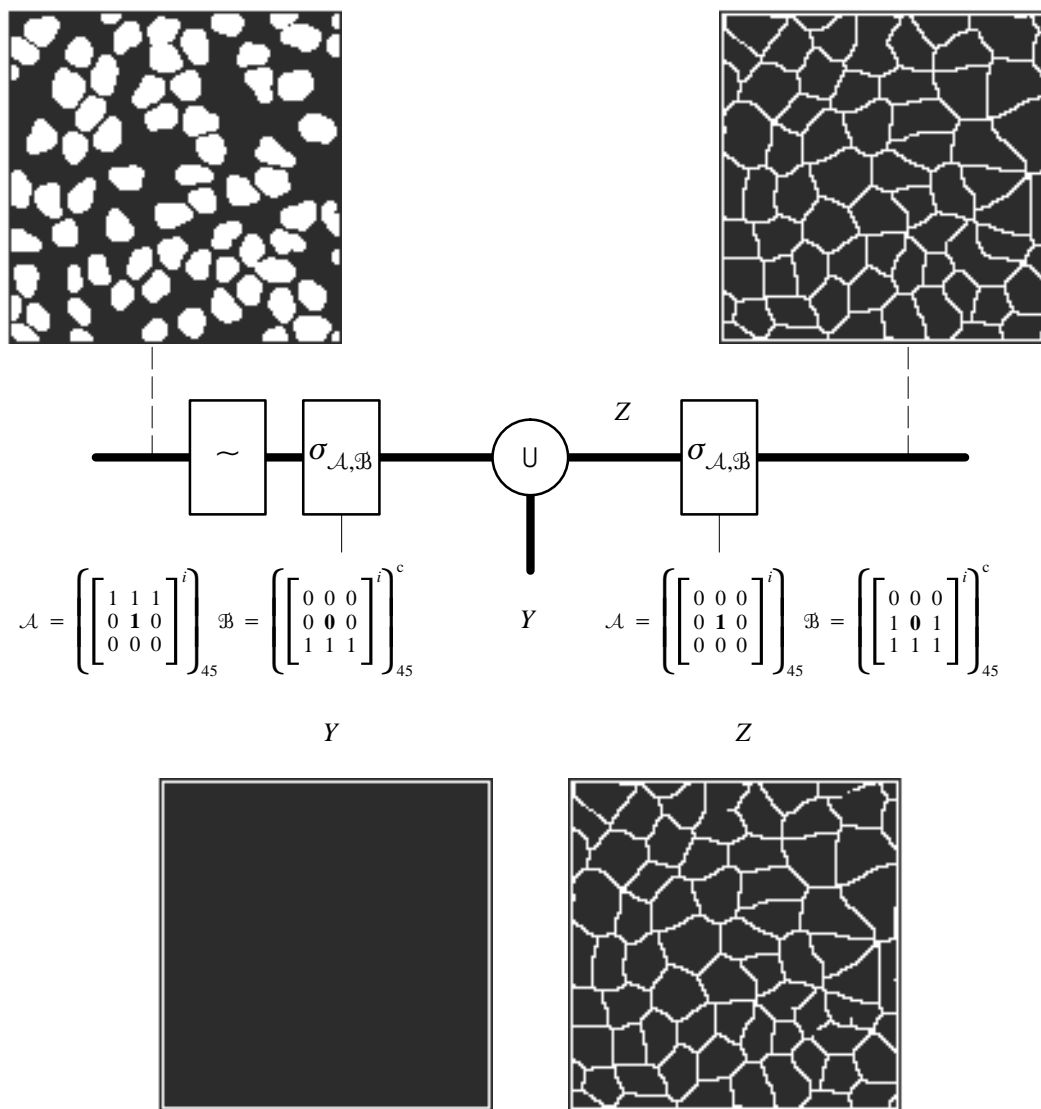


Fig. 9.39 – SKIZ.

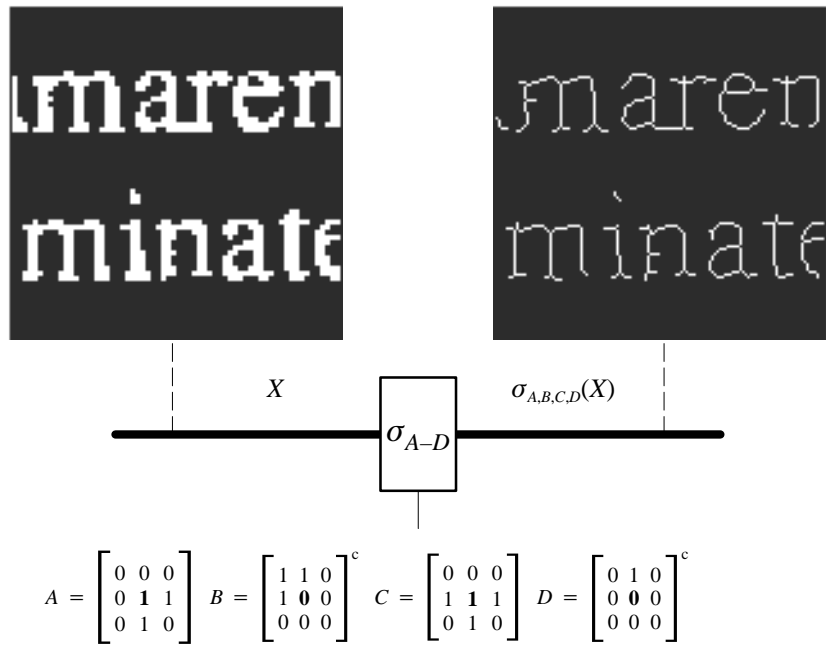


Fig. 9.40 – Esqueleto por afinamento filtrado.

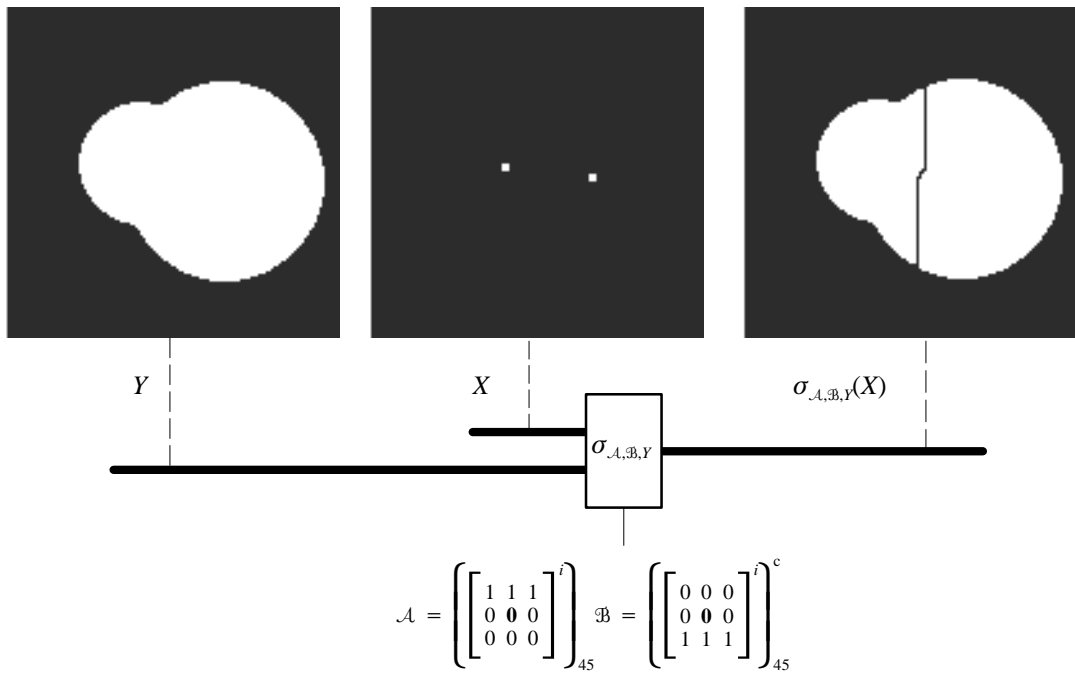


Fig. 9.41 – Espessamentos condicionais. .

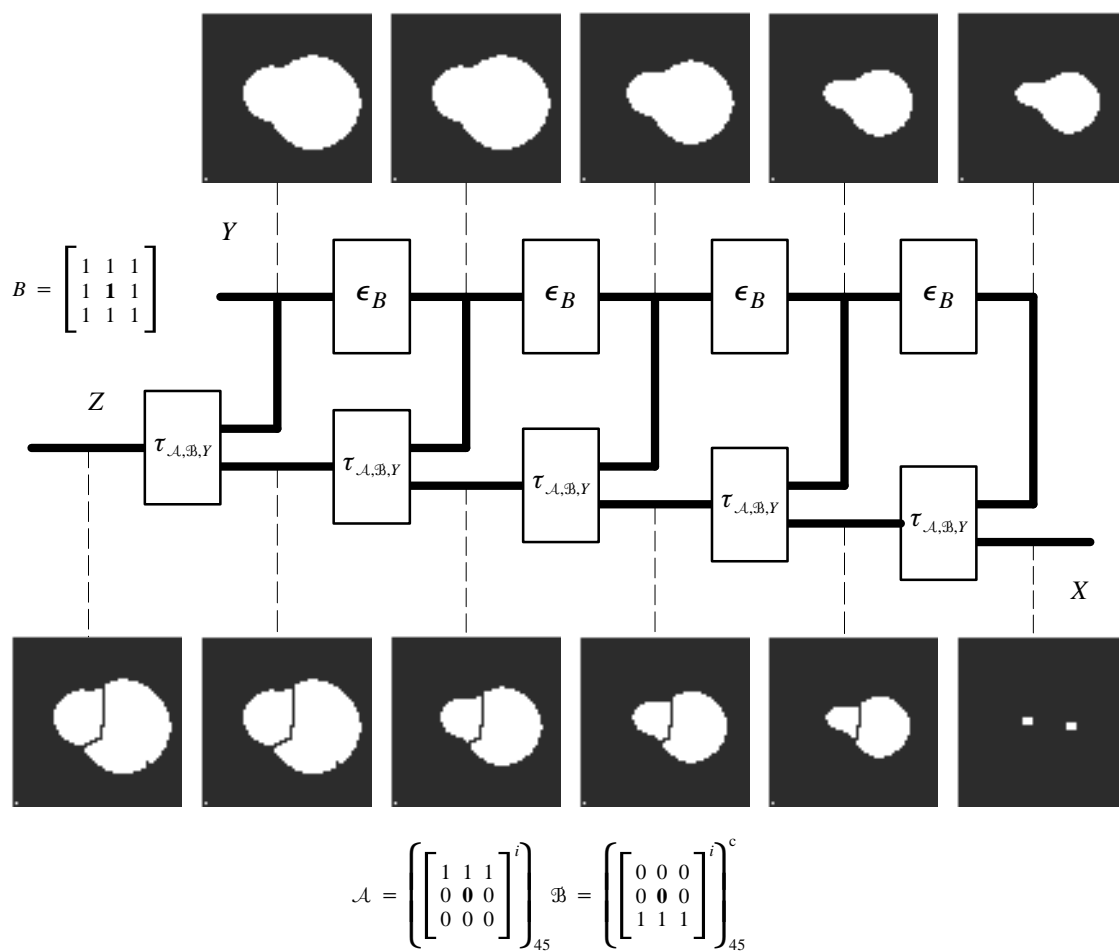


Fig. 9.42 – Espessamento condicional suave.



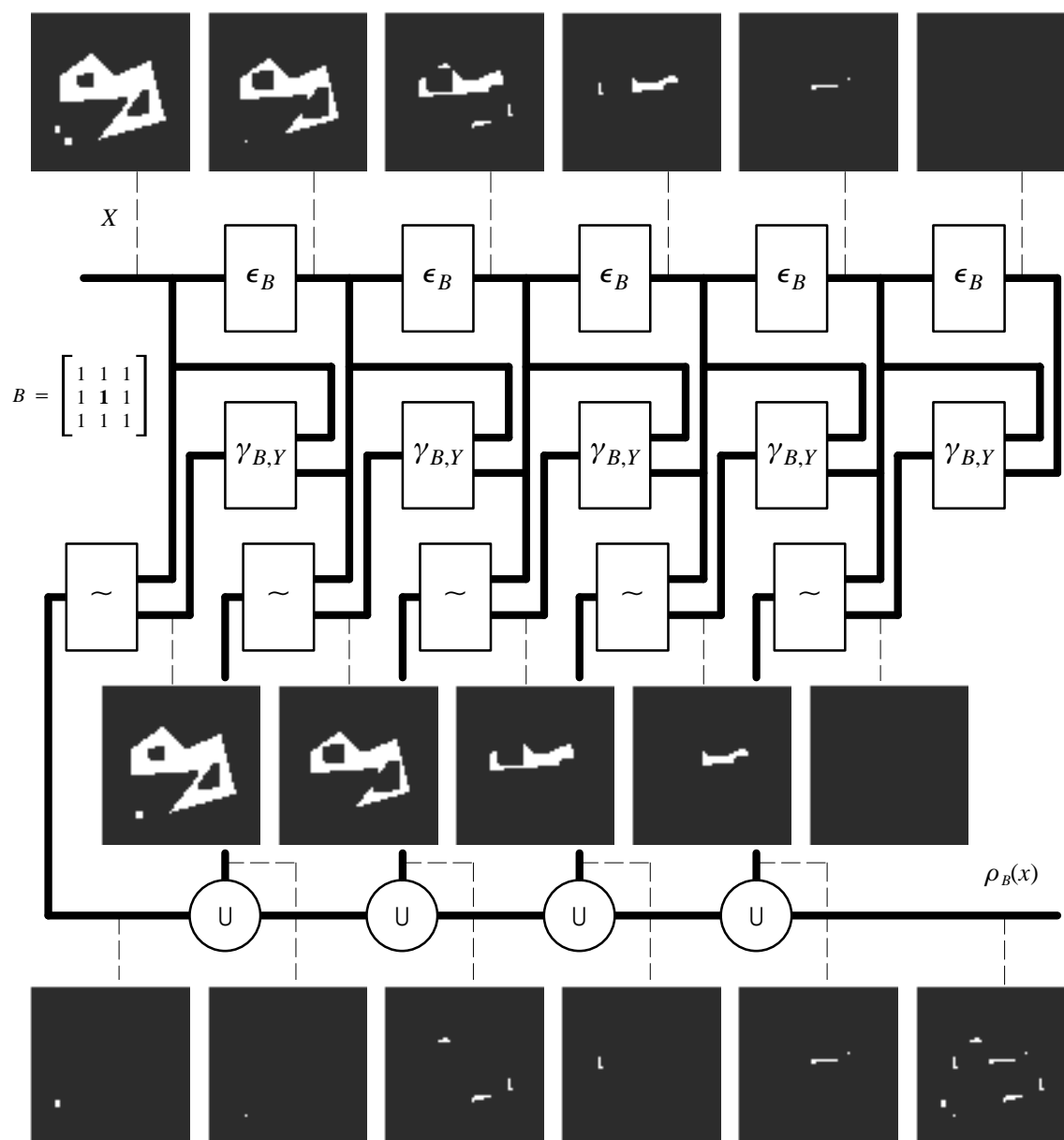


Fig. 9.43 – Erosão última.

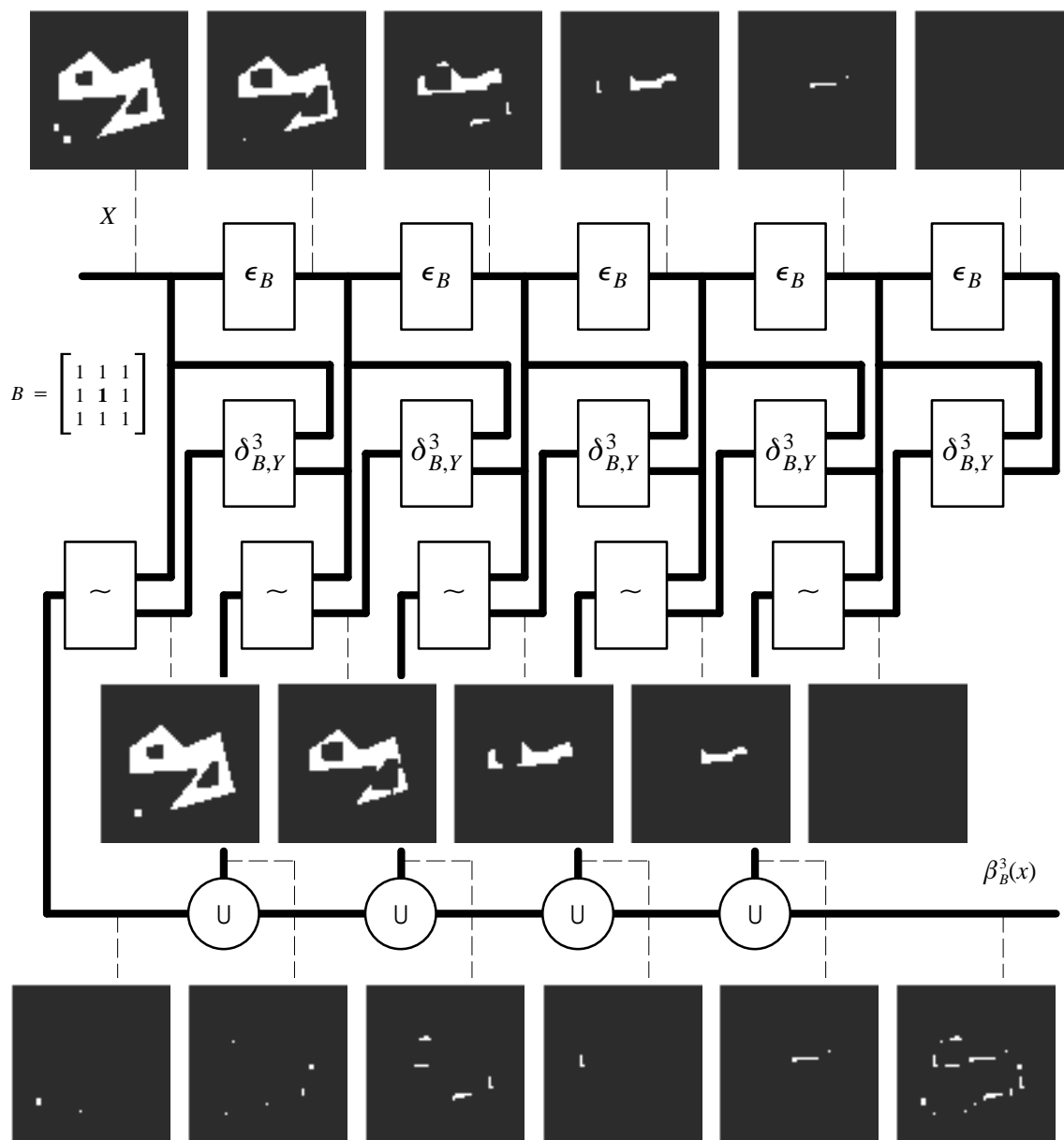


Fig. 9.44 – Bissetor condicional.

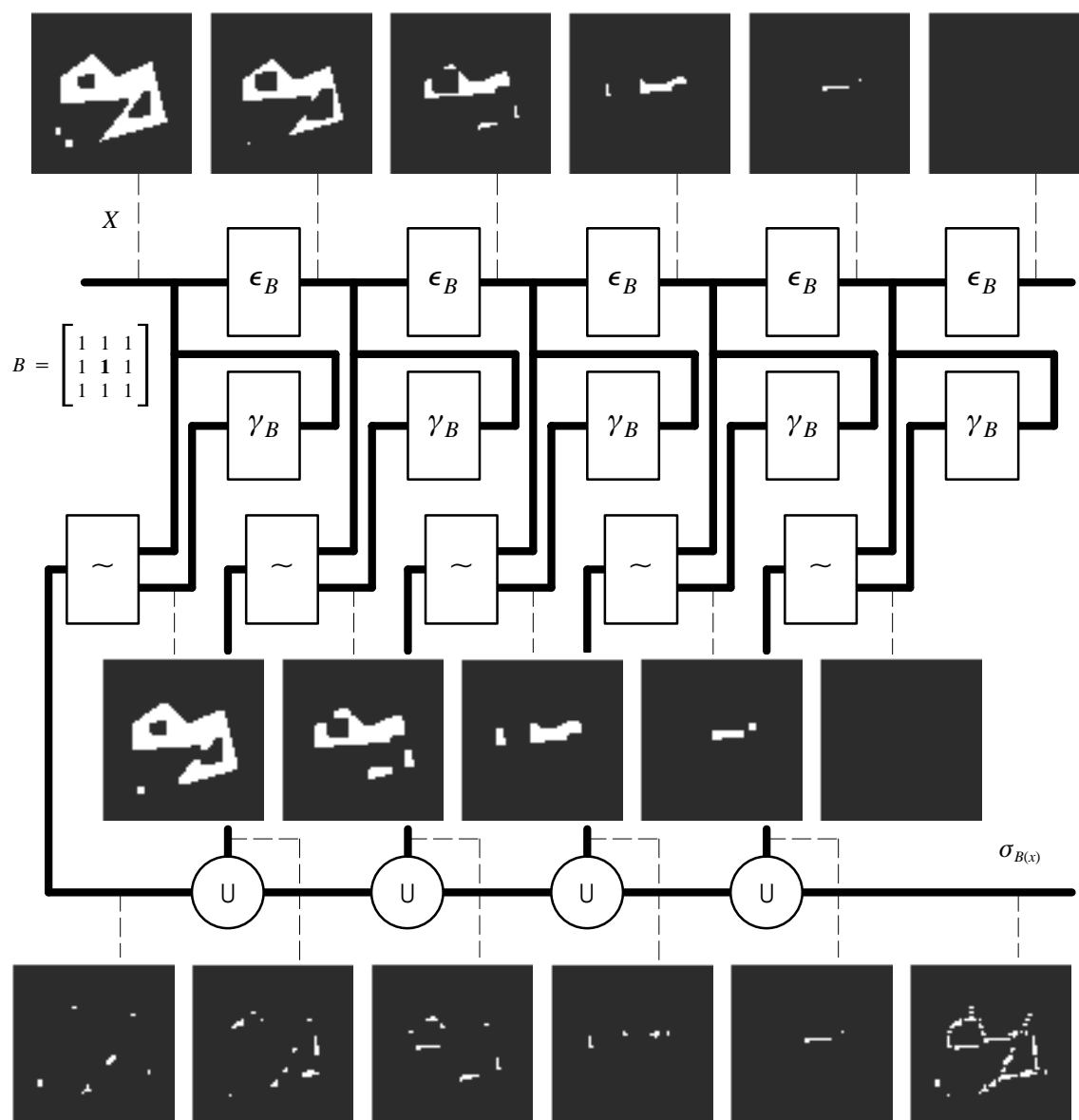


Fig. 9.45 – Esqueleto morfológico.